Winfried Auzinger
Gregor Gantner
Dirk Praetorius

Sommersemester 2015
10. Juni 2015

Übungen zur Vorlesung Computermathematik

Serie 11

Aufgabe 11.1. Schreiben Sie ein LaTeX-File, in dem Sie den folgenden Satz von Brezzi formulieren. Definieren Sie geeignete Makros für die Normen sowie die Bilinearformen $a(\cdot,\cdot)$ und $b(\cdot,\cdot)$.

Satz (Brezzi 1974). Es seien X und Y Hilbert-Räume. Ferner seien $a : X \times X \to \mathbb{R}$ und $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearformen und $X_0 := \big\{x \in X \,:\, b(x,\cdot) = 0 \in Y^*\big\}$. Unter den Voraussetzungen

- $\alpha := \inf\limits_{v \in X_0 \setminus \{0\}} \dfrac{a(v,v)}{\|v\|_X^2} > 0$, d.h. $a(\cdot,\cdot)$ ist elliptisch auf X_0,
- $\beta := \inf\limits_{y \in Y \setminus \{0\}} \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{b(x,y)}{\|x\|_X \|y\|_Y} > 0.$

gilt dann folgende Aussage: Für jedes $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$ gibt es eine eindeutige Lösung $(x,y) \in X \times Y$ des sogenannten Sattelpunktproblems

$$\begin{array}{lcll} a(x,\widetilde{x}) \;+\; b(\widetilde{x},y) & = & x^*(\widetilde{x}) & \text{for all } \widetilde{x} \in X, \\ b(x,\widetilde{y}) & = & y^*(\widetilde{y}) & \text{for all } \widetilde{y} \in Y. \end{array} \tag{1}$$

Aufgabe 11.2. Schreiben Sie eine `myenumerate`-Umgebung mit zugehörigem Zähler, das für den Code

```
\begin{myenumerate}
  \myitem A
  \myitem B
  \myitem C
\end{myenumerate}
```

das folgende Ergebnis liefert

(*i*) A

(*ii*) B

(*iii*) C

wobei die Numerierung mit römischen Zahlen automatisch erfolgt. Bauen Sie auf der `itemize`-Umgebung auf. Schreiben Sie dazu ein Makro `\myitem`, welches den Befehl `\item` geeignet verwendet. Klären Sie im WWW, wie Sie diese Aufgabe auch einfacher mit Hilfe des `enumerate`-Packages lösen können.

Aufgabe 11.3. Informieren Sie sich im WWW über die `list`-Umgebung. Schreiben Sie mittels dieser eine `myitemize`-Umgebung, so dass

```
\begin{myitemize}
  \item A
  \item B
  \item C
\end{myitemize}
```

das folgende Ergebnis liefert

- $\bigstar$ A
- $\bigstar$ B
- $\bigstar$ C

Das Symbol $\bigstar$ erzeugt man mittels `$\bigstar$`.

Aufgabe 11.4. Schreiben Sie eine `satz`- und eine `lemma`- Umgebung, die untenstehendes Layout haben. Dabei wird $\square$ mittels `\square` erzeugt. Für beide Umgebungen werde der gleiche Zähler verwendet. Dieser soll von Kapitel und Abschnitt abhängen. Optional soll ein Name für den Satz bzw. das Lemma vergeben werden dürfen. Verwenden Sie diese Umgebungen in einem Dokument mit mindestens einem Kapitel (`chapter`), und zwei Abschnitten (`section`). Schreiben Sie pro Abschnitt jeweils einen beliebigen Satz und ein beliebiges Lemma aus Ihrer Analysis-Vorlesung ab. Legen Sie stets ein geeignetes `\label` fest.

Satz 1.1.2 (Bolzano-Weierstrass). In einem endlich-dimensionalen normierten Raum X hat jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. $\square$

Lemma 1.1.3 (Zorn). *Jede halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element.* $\square$

Aufgabe 11.5. Schreiben Sie eine `beweis`-Umgebung so, dass ein Beweis mit fett-kursiv ***Beweis.*** eingeleitet werden kann. Das Beweisende werde (als Teil der Umgebung) mittels rechtsbündigem `\blacksquare` als $\blacksquare$ angezeigt. Formulieren Sie die folgende Aussage als Lemma, beweisen Sie dieses mit Techniken der Linearen Algebra und schreiben Sie Lemma und Beweis in LaTeX, wobei alle auftretenden Referenzen mittels `\label` und `\ref` etc. realisiert werden sollen: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $\sum_{j,k=1}^n x_j A_{jk} x_k > 0$ für all $x \in \mathbb{R}^n$, so ist A regulär.

Aufgabe 11.6. Mit Hilfe der vorausgegangenen Aufgabe kann man das *Lemma von Lax-Milgram* im Fall endlich-dimensionaler Räume beweisen: Es sei X ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$, $F : X \to \mathbb{R}$ linear und $a(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf X, d.h. $a(\cdot,\cdot)$ ist linear in beiden Komponenten. Es gelte zusätzlich $a(v, v) > 0$ für alle $v \in X$. Dann gibt es ein eindeutiges $u \in X$ mit $a(u, v) = F(v)$ für alle $v \in X$. Um dies zu beweisen, macht man den Ansatz $u = \sum_{k=1}^n x_k v_k$ und zeigt, dass der Koeffizientenvektor $x \in \mathbb{R}^n$ eindeutig existiert. Formulieren Sie das Lemma von Lax-Milgram als Satz inklusive Beweis in LaTeX und erweitern Sie das Dokument aus der vorausgegangen Aufgabe. Alle auftretenden Referenzen sollen mittels `\label` und `\ref` etc. realisiert werden.

Aufgabe 11.7. Formulieren Sie den folgenden Satz inkl. ausführlichem Beweis in LaTeX.
Hinweis. Die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) haben Sie sicherlich in der Analysis-1-Vorlesung gesehen (und Sie müssen nur das entsprechende Resultat zitieren, aber nicht neu beweisen). Für die Umkehrung (i) $\Rightarrow$ (ii) erinnere man sich daran, dass gleichmäßig stetige Funktionen Cauchy-Folgen auf Cauchy-Folgen abbilden.

Satz 1. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist gleichmäßig stetig.*

(ii) *f erlaubt eine stetige Fortsetzung aufs kompakte Intervall $[a, b]$, d.h. es gibt eine stetige Funktion $\widehat{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\widehat{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in (a, b)$.*

In diesem Fall ist die stetige Fortsetzung $\widehat{f}$ sogar eindeutig.

Aufgabe 11.8. Die Matrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ liege in Blockform

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

vor mit $L_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Sind L_{11} und L_{22} regulär, so ist L regulär, und die Inverse ist gegeben durch

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & 0 \\ -L_{22}^{-1}L_{21}L_{11}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Formulieren Sie diese Aussage inklusive Beweis in LaTeX.