

## Übungen zur Vorlesung Computermathematik

### Serie 11

**Aufgabe 11.1.** Drei natürliche Zahlen  $a, b, c \in \mathbb{N}$  heißen *pythagoräisches Zahlentripel*, wenn  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt. Beweisen Sie mit Hilfe des Ansatzes  $a := m^2 - n^2$  und  $b := 2mn$  mit  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $m > n$ , dass es unendlich viele pythagoräische Zahlentripel gibt. Schreiben Sie diese Beobachtung als Satz mit Beweis in  $\text{\LaTeX}$ . Fügen Sie ferner eine Tabelle an, in der Sie in der Art

$a$	$b$	$c$
3	4	5

mindestens 5 pythagoräische Zahlentripel tabellieren.

**Aufgabe 11.2.** Schreiben Sie eine `myenumerate`-Umgebung mit zugehörigem Zähler, das für den Code

```
\begin{myenumerate}
  \myitem A
  \myitem B
  \myitem C
\end{myenumerate}
```

das folgende Ergebnis liefert

- (i) A
- (ii) B
- (iii) C

wobei die Numerierung mit römischen Zahlen automatisch erfolgt. Bauen Sie auf der `itemize`-Umgebung auf. Schreiben Sie dazu ein Makro `\myitem`, welches den Befehl `\item` geeignet verwendet. Klären Sie im WWW, wie Sie diese Aufgabe auch einfacher mit Hilfe des `enumerate`-Packages lösen können.

**Aufgabe 11.3.** Informieren Sie sich im WWW über die `list`-Umgebung. Schreiben Sie mittels dieser eine `myitemize`-Umgebung, so dass

```
\begin{myitemize}
  \item A
  \item B
  \item C
\end{myitemize}
```

das folgende Ergebnis liefert

♠ A

♠ B

♠ C

Das Symbol ★ erzeugt man mittels `\spadesuit`.

**Aufgabe 11.4.** Schreiben Sie eine `satz`- und eine `lemma`- Umgebung, die untenstehendes Layout haben. Dabei wird  $\square$  mittels `\square` erzeugt. Für beide Umgebungen werde der gleiche Zähler verwendet. Dieser soll von Kapitel und Abschnitt abhängen. Optional soll ein Name für den Satz bzw. das Lemma vergeben werden dürfen. Verwenden Sie diese Umgebungen in einem Dokument mit mindestens einem Kapitel (`chapter`), und zwei Abschnitten (`section`). Schreiben Sie pro Abschnitt jeweils einen beliebigen Satz und ein beliebiges Lemma aus Ihrer Analysis-Vorlesung ab. Legen Sie stets ein geeignetes `\label` fest.

**Satz 1.1.2** (BOLZANO-WEIERSTRASS). In einem endlich-dimensionalen normierten Raum  $X$  hat jede beschränkte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge.  $\square$

**Lemma 1.1.3** (ZORN). Jede halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element.  $\square$

**Aufgabe 11.5.** Schreiben Sie eine `beweis`-Umgebung so, dass ein Beweis mit fett-kursiv *Beweis*. eingeleitet werden kann. Das Beweisende werde (als Teil der Umgebung) mittels rechtsbündigem

`\blacksquare` als ■ angezeigt. Formulieren Sie die folgende Aussage als Lemma, beweisen Sie dieses mit Techniken der Linearen Algebra und schreiben Sie Lemma und Beweis in  $\LaTeX$ , wobei alle auftretenden Referenzen mittels `\label` und `\ref` etc. realisiert werden sollen: Ist  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix mit  $\sum_{j,k=1}^n x_j A_{jk} x_k > 0$  für all  $x \in \mathbb{R}^n$ , so ist  $A$  regulär.

**Aufgabe 11.6.** Mit Hilfe der vorausgegangenen Aufgabe kann man das *Lemma von Lax-Milgram* im Fall endlich-dimensionaler Räume beweisen: Es sei  $X$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  linear und  $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Bilinearform auf  $X$ , d.h.  $a(\cdot, \cdot)$  ist linear in beiden Komponenten. Es gelte zusätzlich  $a(v, v) > 0$  für alle  $v \in X$ . Dann gibt es ein eindeutiges  $u \in X$  mit  $a(u, v) = F(v)$  für alle  $v \in X$ . Um dies zu beweisen, macht man den Ansatz  $u = \sum_{k=1}^n x_k v_k$  und zeigt, dass der Koeffizientenvektor  $x \in \mathbb{R}^n$  eindeutig existiert. Formulieren Sie das Lemma von Lax-Milgram als Satz inklusive Beweis in  $\LaTeX$  und erweitern Sie das Dokument aus der vorausgegangenen Aufgabe. Alle auftretenden Referenzen sollen mittels `\label` und `\ref` etc. realisiert werden.

**Aufgabe 11.7.** Formulieren Sie folgendes Resultat als Satz inklusive ausführlichen Beweis in  $\LaTeX$  und erweitern Sie das Dokument aus der vorausgegangenen Aufgabe. Alle auftretenden Referenzen sollen mittels `\label` und `\ref` etc. realisiert werden. Gegeben Sei ein metrischer Raum  $X$ . Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  konvergiert genau dann gegen einen Grenzwert  $x \in X$ , wenn jede Teilfolge  $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_{j_k}})_{k \in \mathbb{N}}$  besitzt, die gegen  $x$  konvergiert.

**Aufgabe 11.8.** Schreiben Sie einen beliebigen Text mit Überschrift und mindestens 400 Worten und 10 Eigennamen in  $\LaTeX$ . Als Schriftgröße wählen Sie 12pt. Gliedern Sie den Text in mindestens 2 Sections. Tragen Sie alle Eigennamen in einen Index ein, der am Ende des Dokuments ausgegeben wird.