Dirk Praetorius
Winfried Auzinger

Sommersemester 2017
24.05.2017

Übungen zur Vorlesung
Computermathematik

Serie 10

Aufgabe 10.1. Schreiben Sie ein LaTeX-File, das als Inhalt dieses Übungsblatt hat — Kopf des Übungsblattes bis inklusive Aufgabe 10.2. Um einen LaTeX-Befehl `\befehl` zeichenweise wiederzugeben, können Sie `\verb|\befehl|` verwenden.

Aufgabe 10.2. Schreiben Sie einen Text Ihrer Wahl mit Überschrift und mindestens 400 Worten in LaTeX. Gliedern Sie den Text in mindestens 2 Sections und erzeugen Sie ein Inhaltsverzeichnis. Als Schriftgröße wählen Sie 12pt. Was bedeutet die Warnung `Overfull hbox`? Modifizieren Sie ggf. den Text so, dass LaTeX diese Warnung zurückgibt. Schauen Sie sich die erzeugte log-Datei `name.log` an und bereiten Sie vor, den Inhalt der Datei in der Übung erklären zu können. Wie müsste man den Text modifizieren, um die Warnung `Overfull hbox` zu vermeiden? (Verwenden Sie dazu `\-` bzw. `\linebreak`. Was ist der Unterschied zwischen `\linebreak` und `\newline`?) Geben Sie in einer Fußnote `\footnote{...}` die Referenz an, von wo Sie den Text entnommen haben.

Aufgabe 10.3. Realisieren Sie die folgende Definition einer Vandermondematrix:

$$V := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

in LaTeX. Die Punkte werden mittels `\cdots`, `\vdots` und `\ddots` erstellt. Das Symbol $\times$ erhält man durch `\times`.

Aufgabe 10.4. Schreiben Sie eine `myenumerate`-Umgebung mit zugehörigem Zähler, das für den Code

```
\begin{myenumerate}
  \myitem A
  \myitem B
  \myitem C
\end{myenumerate}
```

das folgende Ergebnis liefert

(i) A

(ii) B

(iii) C

wobei die Numerierung mit römischen Zahlen automatisch erfolgt. Bauen Sie auf der `itemize`-Umgebung auf. Schreiben Sie dazu ein Makro `\myitem`, welches den Befehl `\item` geeignet verwendet. Klären Sie im WWW, wie Sie diese Aufgabe auch einfacher mit Hilfe des `enumerate`-Packages lösen können.

Aufgabe 10.5. Verwenden Sie `\newtheorem`, um eine *Satz*-Umgebung zu erzeugen. Schreiben Sie eine *Beweis*-Umgebung. Der Beweis werde (als Teil der Umgebung) mit fett-kursiv ***Beweis*** eingeleitet. Das Beweisende werde (als Teil der Umgebung) mittels rechtsbündigem `\blacksquare` $\blacksquare$ angezeigt, d.h. $\blacksquare$ steht rechtsbündig in der letzten Zeile des Beweises. Formulieren Sie den folgenden Satz inkl. ausführlichem Beweis in LaTeX.

Hinweis. Die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) haben Sie sicherlich in der Analysis-1-Vorlesung gesehen. Für die Umkehrung (i) $\Rightarrow$ (ii) erinnere man sich daran, dass gleichmäßig stetige Funktionen Cauchy-Folgen auf Cauchy-Folgen abbilden.

Theorem 1. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist gleichmäßig stetig.*

(ii) *f erlaubt eine stetige Fortsetzung aufs kompakte Intervall $[a, b]$, d.h. es gibt eine stetige Funktion $\widehat{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\widehat{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in (a, b)$.*

In diesem Fall ist die stetige Fortsetzung $\widehat{f}$ sogar eindeutig.

Aufgabe 10.6. Formulieren Sie folgendes Resultat als Satz inklusive ausführlichen Beweis in LaTeX und erweitern Sie das Dokument Aufgabe 10.5. Alle auftretenden Referenzen sollen mittels `\label` und `\ref` etc. realisiert werden. Definieren Sie ein geeignetes Makro für Folgen. Eine Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen einen Grenzwert $x \in \mathbb{R}$, wenn jede Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\left(x_{n_{j_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt, die gegen x konvergiert.

Aufgabe 10.7. Formulieren Sie folgendes Resultat als Satz inklusive ausführlichen Beweis in LaTeX und erweitern Sie das Dokument Aufgabe 10.5. Alle auftretenden Referenzen sollen mittels `\label` und `\ref` etc. realisiert werden.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sqrt{n} \in \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist,} \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schreiben Sie ein LaTeX-File, das als Inhalt die (als Satz formulierte) Behauptung und den (ausführlichen) Beweis hat. Verwenden Sie die Umgebungen aus Aufgabe 10.5.
Hinweis. Sie dürfen verwenden, dass jede natürliche Zahl x eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat, d.h. es gibt eine eindeutige endliche Folge von Primzahlen $2 \le p_1 \le \cdots \le p_k$ mit $x = \prod_{j=1}^{k} p_j$.

Aufgabe 10.8. Formulieren Sie folgendes Resultat als Satz inklusive ausführlichem Beweis in LaTeX und erweitern Sie das Dokument Aufgabe 10.5. Alle auftretenden Referenzen sollen mittels `\label` und `\ref` etc. realisiert werden. Definieren Sie ein geeignetes Makro für Normen und $\operatorname{dist}(\cdot, \cdot)$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen mit kompaktem Abschluss $\overline{A}, \overline{B}$ und $A \cap B = \emptyset$. Wir definieren den Rand der Mengen als $\partial A := \overline{A} \setminus A$ und $\partial B := \overline{B} \setminus B$ (das Symbol ∂ wird mit `\partial` erzeugt). Dann gilt für die Distanz zwischen den beiden Mengen, dass $\operatorname{dist}(A, B) = \operatorname{dist}(\partial A, \partial B)$, wobei wir für beliebige Mengen $C, D \subset \mathbb{R}^n$ die Distanz definieren als

$$\operatorname{dist}(C, D) := \inf\{\|x - y\|_2 : x \in C, y \in D\} \tag{1}$$

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass $\operatorname{dist}(A, B) = \operatorname{dist}(\overline{A}, \overline{B})$. Überlegen Sie sich dann, dass das Infimum in (1) für kompakte Mengen C, D angenommen wird.