

Übungen zur Vorlesung Computermathematik

Serie 11

Aufgabe 11.1. Verwenden Sie `\newenvironment`, um eine *Satz*-Umgebung, sowie eine *Beweis*-Umgebung zu erzeugen. Der Beweis werde mit fett-kursiv ***Beweis.*** eingeleitet. Das Beweisende werde (als Teil der Umgebung) mittels rechtsbündigem `\blacksquare` ■ angezeigt, d.h. ■ steht rechtsbündig in der letzten Zeile des Beweises. Formulieren Sie den folgenden Satz inkl. ausführlichen Beweises in L^AT_EX.

Satz 1. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) f ist gleichmäßig stetig.
- (ii) f erlaubt eine stetige Fortsetzung auf das kompakte Intervall $[a, b]$, d.h. es gibt eine stetige Funktion $\hat{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\hat{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in (a, b)$.

In diesem Fall ist die stetige Fortsetzung \hat{f} sogar eindeutig.

Hinweis. Die `itshape`-Umgebung formatiert einen Text *kursiv*.

Die Implikation (ii) \Rightarrow (i) haben Sie sicherlich in der Analysis-1-Vorlesung gesehen. Für die Umkehrung (i) \Rightarrow (ii) erinnere man sich daran, dass gleichmäßig stetige Funktionen Cauchy-Folgen auf Cauchy-Folgen abbilden.

Aufgabe 11.2. Erweitern Sie Aufgabe 11.1. Formulieren Sie die folgende Aussage als Satz, beweisen Sie diesen mit Techniken der Linearen Algebra und schreiben Sie Satz und Beweis in L^AT_EX, wobei alle auftretenden Referenzen mittels `\label` und `\ref` etc. realisiert werden sollen: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit $\sum_{j,k=1}^n x_j A_{jk} x_k > 0$ für all $x \in \mathbb{R}^n$, so ist A regulär.

Aufgabe 11.3. Schreiben Sie ein L^AT_EX-File, in dem Sie den folgenden Satz von Brezzi formulieren. Definieren Sie geeignete Makros für die Normen sowie die Bilinearformen $a(\cdot, \cdot)$ und $b(\cdot, \cdot)$.

Satz (Brezzi 1974). Es seien X und Y Hilbert-Räume. Ferner seien $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ und $b : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Bilinearformen und $X_0 := \{x \in X : b(x, \cdot) = 0 \in Y^*\}$. Unter den Voraussetzungen

- $\alpha := \inf_{v \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{a(v, v)}{\|v\|_X^2} > 0$, d.h. $a(\cdot, \cdot)$ ist elliptisch auf X_0 ,
- $\beta := \inf_{y \in Y \setminus \{0\}} \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{b(x, y)}{\|x\|_X \|y\|_Y} > 0$

gilt dann folgende Aussage: Für jedes $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$ gibt es eine eindeutige Lösung $(x, y) \in X \times Y$ des sogenannten Sattelpunktproblems

$$\begin{aligned} a(x, \tilde{x}) + b(\tilde{x}, y) &= x^*(\tilde{x}) && \text{für alle } \tilde{x} \in X, \\ b(x, \tilde{y}) &= y^*(\tilde{y}) && \text{für alle } \tilde{y} \in Y. \end{aligned} \tag{1}$$

Aufgabe 11.4. Schreiben Sie eine `myenumerate`-Umgebung mit zugehörigem Zähler, das für den Code

```
\begin{myenumerate}
  \myitem A
  \myitem B
  \myitem C
\end{myenumerate}
```

das folgende Ergebnis liefert

- (i) A
- (ii) B
- (iii) C

wobei die Numerierung mit römischen Zahlen automatisch erfolgt. Bauen Sie auf der `itemize`-Umgebung auf. Schreiben Sie dazu ein Makro `\myitem`, welches den Befehl `\item` geeignet verwendet. Klären Sie im WWW, wie Sie diese Aufgabe auch einfacher mit Hilfe des `enumerate`-Packages lösen können.

Aufgabe 11.5. Schreiben Sie eine `satz`- und eine `lemma`-Umgebung, die untenstehendes Layout haben, cf. Aufgabe 11.1. Dabei wird \square mittels `\square` erzeugt. Für beide Umgebungen werde der gleiche Zähler verwendet. Dieser soll von Kapitel und Abschnitt abhängen. Optional soll ein Name für den Satz bzw. das Lemma vergeben werden dürfen. Verwenden Sie diese Umgebungen in einem Dokument mit mindestens einem Kapitel (`chapter`), und zwei Abschnitten (`section`). Schreiben Sie pro Abschnitt jeweils einen beliebigen Satz und ein beliebiges Lemma aus Ihrer Analysis-Vorlesung ab (ohne Beweise). Legen Sie stets ein geeignetes `\label` fest.

Satz 1.1.2 (BOLZANO-WEIERSTRASS). In einem endlich-dimensionalen normierten Raum X hat jede beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. \square

Lemma 1.1.3 (ZORN). Jede halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element. \square

Aufgabe 11.6. Die Matrix $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ liege in Blockform

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

vor mit $L_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ und $0 < k < n$. Sind L_{11} und L_{22} regulär, so ist L regulär, und die Inverse ist gegeben durch

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & 0 \\ -L_{22}^{-1}L_{21}L_{11}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Formulieren Sie diese Aussage inklusive Beweis in \LaTeX .

Aufgabe 11.7. Für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den **einseitigen Differenzenquotienten**

$$\Phi(h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{für } h > 0$$

und $\Phi(0) := f'(x)$. Nach Voraussetzung gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(h) = \Phi(0)$. Beweisen Sie mittels Satz von Taylor, dass für $f \in C^2(\mathbb{R})$ gilt

$$|\Phi(0) - \Phi(h)| = \mathcal{O}(h),$$

und bestimmen Sie dabei die Konstante, die sich in der Landau-Notation versteckt, möglichst genau. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in Form eines Lemmas mit Beweis in \LaTeX .

Aufgabe 11.8. Für $f \in C^2(\mathbb{R})$ gilt $e_h := |\Phi(h) - \Phi(0)| = \mathcal{O}(h)$ mit der Funktion Φ aus Aufgabe 11.7. Für allgemeines $f \in C^1(\mathbb{R})$ beobachtet man aber nur $e_h = \mathcal{O}(h^\alpha)$ für ein $\alpha \in (0, 1]$. Die Konstante α nennt man **Konvergenzordnung**. Mit dem Ansatz $e_h = ch^\alpha$ erfüllt dann die Größe $\delta_h := |\Phi(h) - \Phi(h/2)|$ die Abschätzung

$$e_h(1 - 2^{-\alpha}) \leq \delta_h \leq e_h(1 + 2^{-\alpha}),$$

d.h. es gilt ebenso $\delta_h = \mathcal{O}(h^\alpha)$. Mit dem weiteren Ansatz $\delta_h = Ch^\alpha$ erhält man für h und $h/2$ zwei Gleichungen, aus denen man die **experimentelle Konvergenzordnung** α und die zugehörige Konstante C berechnen kann:

$$\alpha = \log(\delta_h/\delta_{h/2})/\log(2) \quad \text{sowie} \quad C = \delta_h/h^\alpha.$$

Formulieren Sie diesen Aufgabentext in eigenen Worten und mit allen rechnerischen Zwischenschritten in \LaTeX .