Serie 1

Besprechung: Donnerstag, 18.10.12

1.1. Betrachten Sie die skalare Erhaltungsgleichung

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

mit Anfangsbedingung $u(\cdot,0) = u_0$. Lösen Sie die Gleichung mittels des Charakteristikenverfahrens (nehmen Sie an, die Lösung ist glatt).

1.2. Sei $u_0(x) = u_l$ für $x < 0$ und $u_0(x) = u_r$ für $x > 0$ wobei $u_l < u_r$. Zeigen Sie: Für jedes u_m mit $u_l \le u_m \le u_r$ und $s_m = (u_l + u_m)/2$ ist die Funktion

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x < s_m t \\ u_m & s_m t \le x \le u_m t \\ x/t & u_m t \le x \le u_r t \\ u_r & x > u_r t \end{cases}$$

eine schwache Lösung der Burgers Gleichung $\partial_t u + \partial_x f(u)) = 0$ mit $f(u) = \frac{1}{2}u^2$. Skizzieren Sie die Charakteristiken. Geben Sie weitere schwache Lösungen mit 3 Unstetigkeitslinien an.

1.3. Betrachten Sie das Riemannproblem aus Aufg. 2 aber diesmal mit $u_l > u_r$. Zeigen Sie:

a) Es gibt keine schwachen Lösungen, die aus genau 2 Schocks besteht.

b) Es gibt jedoch schwache Lösungen, die aus 3 Schocks bestehen.

1.4. Zeigen Sie, daß eine klassische Lösung der Burgersgleichung auch eine Lösung der Gleichung

$$\partial_t(u^2) + \partial_x\left(\frac{2}{3}u^3\right) = 0 \tag{2}$$

ist. Zeigen Sie, daß im Fall $u_l > u_r$ die Schocklösung des Riemannproblems für die Burgersgleichung *nicht* eine schwache Lösung von (2) ist. Geben Sie Schocklösungen von (2) an.

1.5. Betrachten Sie die Burgersgleichung.

a) Betrachten Sie die Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Geben Sie die[1] Lösung an. Skizzieren Sie die Charakteristiken und die Schockkurven.

b) Betrachten Sie die Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Lösung (zumindest für kleine Zeiten t).

[1] gemeint ist natürlich die Entropielösung, die hier aus Schocks besteht

1.6. **a)** (Cole-Hopf Transformation). Leiten Sie die Formel

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-y}{t} e^{-G(x,t;y)/(2\varepsilon)}\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-G(x,t;y)/(2\varepsilon)}\,dy} \\ G(x,t;y) &= \frac{(x-y)^2}{2t} + \int_0^y u_0(\xi)\,d\xi \end{aligned}$$

für die Lösung u der viskosen Burgersgleichung

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \qquad u(x,0) = u_0(x) \tag{3}$$

her. Hinweis: Betrachten Sie die Substitution

$$u = -2\varepsilon \frac{\varphi_x}{\varphi}$$

und benutzen Sie die Lösungsformel für die Wärmeleitungsgleichung: Die Funktion

$$\varphi(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) e^{-(x-y)^2/(4\varepsilon t)}\,dy$$

löst

$$\partial_t \varphi - \varepsilon \partial_x^2 \varphi = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \qquad \varphi(\cdot,0) = \Phi(\cdot).$$

b) Sei $u_0(x) = 0$ für $|x| > 1$ und $u_0(x) = -\operatorname{sign}(x)$ für $|x| < 1$. Geben Sie die exakte Lösung der (nichtviskosen) Burgersgleichung für $t = 0.5$ im Intervall $(-1,1)$ an. Plotten Sie die Viskositätslösung im Intervall $(-0.8, 0.8)$ für $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$ und $t = 0.9$ mithilfe von z.B. Maple oder Mathematica.

1.7. Lösungen von (3) von der Form $u(x,t) = w(x - st)$ (mit $s \in \mathbb{R}$) heißen "travelling wave" Lösungen. Zeigen Sie: Für u_l, $u_r \in \mathbb{R}$ liefert das Profil

$$w(x) = u_r + \frac{1}{2}(u_l - u_r)\,[1 - \tanh((u_l - u_r)x/(4\varepsilon))]$$

eine "travelling wave". Was ist s? Skizzieren Sie das Profil $w(x)$ für verschiedene Werte von ε.