Serie 2

Besprechung: Donnerstag, 8.11.12

2.1. Zeigen Sie, daß der Spannungstensor σ symmetrisch ist, falls der Drehimpulserhaltungssatz in der folgenden Form gültig ist:

$$\int_{\Omega(t)} x \times \big(\partial_t(\rho v) + \operatorname{Div}(\rho v v^\top)\big)\, dx = \int_{\Omega(t)} x \times (\rho f)\, dx + \int_{\partial\Omega(t)} x \times (\sigma n)\, ds_x$$

für alle (geeigneten) "Startvolumina" $\Omega = \Omega(t_0) \subset \mathbb{R}^3$. Gehen Sie wie folgt vor (Sie dürfen im Folgenden die Identität $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$ verwenden):

a) Sei $a \in \mathbb{R}^3$ ein fester Vektor. Zeigen Sie, daß

$$a \cdot \int_{\partial\Omega(t)} x \times (\sigma n)\, ds_x = \int_{\Omega(t)} (a \times x) \cdot \operatorname{Div}\sigma + \sum_{i,j=1}^{3} \partial_j \,(a \times x)_i\, \sigma_{ij}\, dx.$$

b) Zeigen mittels des Impulserhaltungssatzes und des oben formulierten Drehimpulserhaltungssatzes, daß

$$\sum_{i,j=1}^{3} \partial_j \,(a \times x)_i\, \sigma_{ij} = 0$$

gilt. (Sie dürfen natürlich annehmen, daß alle auftretenden Funktionen hinreichend glatt sind).

c) Zeigen Sie die Symmetrie von σ durch geeignete Wahl von a.

2.2. Zeigen Sie, daß eine Lösung der inkompressiblen Eulergleichungen

$$\nabla \cdot v = 0, \qquad \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \qquad \partial_t(\rho v) + \operatorname{Div}(\rho v v^\top) = \rho f$$

automatisch die "Energiegleichung"

$$\partial_t\Big(\frac{1}{2}\rho|v|^2\Big) + \nabla \cdot \Big(\frac{1}{2}\rho|v|^2 v + pv\Big) = 0$$

erfüllt. Was folgt daraus für die Energiegleichungen?

2.3. (Gesetz von Hagen-Poiseuille) Betrachte eine viskose, kompressible, homogene Strömung in einem Rohr

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < x_1 < L, \quad x_2^2 + x_3^2 < R^2\}$$

der Länge L mit Radius R, welche durch eine Druckdifferenz getrieben wird.

a) Lösen Sie die stationären Navier-Stokesgleichungen

$$\nabla \cdot v = 0, \qquad -\eta\Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p = 0$$

unter der Annahme, daß v die Bauart $v = (v_1(r), 0, 0)$ mit $r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$) hat. Nehmen Sie weiters an, daß der Druck bei $x_1 = 0$ den Wert p_1 und bei $x_1 = L$ den Wert p_2 hat. Nehmen Sie an, daß $v(R) = 0$.

b) Berechnen Sie die Durchflußrate durch das Rohr.

2.4. Sei $\widehat{\sigma} : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ eine Funktion mit der Eigenschaft:

$$\widehat{\sigma}(\partial_t Q Q^\top + QAQ^\top) = Q\widehat{\sigma}(A)Q^\top$$

für alle glatten matrixwertigen Funktionen $Q : \mathbb{R} \to O(d)$, wobei $O(d)$ die Menge der orthogonalen $d \times d$-Matrizen ist mit Determinante 1. Zeigen Sie:

$$\widehat{\sigma}(A) = \widehat{\sigma}\Big(\frac{1}{2}(A + A^\top)\Big).$$

Hinweis: Sei W eine schiefsymmetrische Matrix und $Q(t) := e^{-tW}$. Zeigen Sie: $Q(t) \in O(d)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Überlegen Sie sich, daß $\widehat{\sigma}(-W + A) = \widehat{\sigma}(A)$ folgt. Wählen Sie W.

2.5. (Potentialströmungen) Eine Strömung v heißt *Potentialströmung*, falls $v = \nabla\varphi$ (für eine skalarwertige Funktion φ, das sog. *Potential*).

a) Zeigen Sie $\nabla \times v = 0$.

b) Zeigen Sie, daß für inkompressible Strömungen das Potential φ die Laplacegleichung $-\Delta\varphi = 0$ erfüllt.

c) Zeigen Sie den Satz von Bernoulli: Sei v eine reibungsfreie (d.h. $\sigma = -p\,\mathrm{I}$) Potentialströmung mit $f = 0$. Sei C eine Kurve, die die Punkte x_0 und x_1 verbindet. Dann gilt:

$$\left[\varphi_t + \frac{1}{2}|v|^2\right]_{x_0}^{x_1} + \int_C \frac{1}{\rho}\nabla p \cdot ds = 0.$$

d) Betrachten Sie eine inkompressible, stationäre Potentialströmung. Zeigen Sie, daß der Druck p (bis auf eine additive Konstante) gegeben ist durch

$$p = -\frac{1}{2}\rho|v|^2 = E_{kin}$$

2.6. Betrachten Sie eine stationäre Strömung zwischen zwei unendlich langen, koaxialen (langsam) rotierenden Kreiszylindern. Die Geometrie damit:

$$\Omega = \{(x, y, z) \,|\, R_1 < r < R_2, \quad z \in \mathbb{R}\}, \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

Das homogene Fluid werde beschrieben durch die inkompressiblen Navier-Stokesgleichungen mit Haftrandbedingungen. Bestimmen Sie eine radialsymmetrische, stationäre Lösung unter der Annahme $f = 0$. D.h.: die Strömung "bewegt" sich nur in der (x, y)-Ebene und ist dort radialsymmetrisch. Insbesondere nehmen Sie an, daß v und p nicht von z abhängen. Es möge der äußere Zylinder die Winkelgeschwindigkeit ω_2 haben und der innere die Winkelgeschwindigkeit ω_1.

Hinweis: Die ODE $y'' + \frac{1}{r}y' - \frac{1}{r^2}y = 0$ hat Lösungen der Form $y(r) = r^\alpha$.