Serie 3

Besprechung: Donnerstag, 22.11.12

3.1. Betrachten Sie das (singulär gestörte) Problem

$$\varepsilon y'' + 2y' + y = e^x, \qquad x \in (0,1), \qquad y(0) = y(1) = 0 \tag{1}$$

für kleine $\varepsilon > 0$.

a) Formulieren Sie die Gleichungen für die "äußere Entwicklung"

b) Formulieren Sie die Gleichungen für die "innere Entwicklung" auf dem Intervall $(0, \varepsilon)$. Verwenden Sie hierzu, daß die rechte Seite $f(x) = e^x$ auf $(0, \varepsilon)$ in der neuen Variable ξ entwickelt werden kann als $f(x) = f(\varepsilon\xi) = f(0) + \varepsilon\xi f'(0) + \cdots$.

c) Bestimmen Sie die Terme y_0, y_1 der äußeren Entwicklung und die Terme Y_0, Y_1 der inneren Entwicklung mittels "matching". Geben Sie eine uniforme Approximation an (nur formal—Sie müssen nicht nachrechnen, daß diese Approximation sinnvoll ist).

3.2. Betrachte Sie folgende gestörte Gleichung

$$-y'' + \varepsilon y' + y = f(x), \qquad x \in (0,1), \qquad y(0) = y(1) = 0$$

für kleine ε.

a) Machen Sie einen Ansatz $y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots$ und leiten Sie geeignete Gleichungen für die Funktionen y_i her.

b) Versuchen Sie, die Entwicklung zu rechtfertigen, d.h. zeigen Sie, daß (unter geeigneten Glattheitsvoraussetzungen an f die endliche Reihe $\sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i y_i$ für kleine ε eine gute Approximation an die exakte Lösung ist. *Hinweis:* Sie dürfen verwenden, daß für die Lösung des Problems

$$-u'' + u = g, \qquad x \in (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

nach Lax-Milgram gilt:

$$\|u'\|^2_{L^2(0,1)} + \|u\|^2_{L^2(0,1)} \le \|g\|^2_{L^2(0,1)}.$$

c) (*) Können Sie auch Aussagen über den punktweisen Fehler machen?

d) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dann existieren alle Terme y_i der äusseren Entwicklung. Konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i$?

3.3. Betrachten Sie das singulär gestörte Problem

$$-\varepsilon^2 y'' + y = f(x), \qquad x \in (0,1), \qquad y(0) = y(1) = 0$$

a) Formulieren Sie die Gleichungen für die äußere Entwicklung. Welche Randbedingungen können Sie stellen?

b) Grenzschichten treten nun an beiden Endpunkten $x = 0$ und $x = 1$. Betrachten Sie nur das Verhalten an der Stelle $x = 0$. Für die innere Entwicklung machen Sie den Ansatz $x = \varepsilon^\alpha \xi$ mit $\alpha > 0$. Bestimmen Sie α.

c) Konstruieren Sie so viele Terme der äußeren und inneren Entwicklung, daß Sie eine Approximation $\widetilde{y}$ erhalten, deren Residuum (d.h. sowohl das Volumsresiduum $-\varepsilon^2 \widetilde{y}'' + \widetilde{y}$ als auch das Randresiduum $|\widetilde{y}(\pm 1)|$) von der Ordnung $O(\varepsilon^2)$ ist.

d) Der Satz von Lax-Milgram besagt für die Lösung y, daß

$$\varepsilon \|y'\|^2_{L^2(0,1)} + \|y\|^2_{L^2(0,1)} \le \|f\|^2_{L^2(0,1)}.$$

Zeigen Sie damit, daß Sie die von Ihnen bestimmte uniforme Approximation tatsächlich eine sinnvolle Approximation an die exakte Lösung ist.

3.4. (Mehrskalenansätze) Betrachten Sie für $\varepsilon > 0$ und $t > 0$ das AWP

$$y'' + 2\varepsilon y' + (1 + \varepsilon^2)y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

a) Berechnen Sie eine Approximation der Lösung mittels des Ansatz $y \sim y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots$ bis zur Ordnung 1 in ε.

b) Vergleichen Sie Ihre Approximation mit der exakten Lösung

$$y(t) = e^{-\varepsilon t} \sin t$$

Für welche Zeiten t ist die Approximation gut?

c) Um Approximationen zu erhalten, die das Potential haben, gut gleichmäßig in t zu sein, kann man einen *Mehrskalenansatz* machen:

$$y(t) \sim y_0(t, \tau) + \varepsilon y_1(t, \tau) + \varepsilon^2 y_2(t, \tau) + \cdots$$

wobei $\tau = \varepsilon t$ die "langsame" Zeitskala ist. Berechnen Sie mit diesem Ansatz eine Approximation y_0. *Hinweis:* Die Gleichung niedrigster Ordnung bestimmt y_0 noch nicht eindeutig, und Koeffizientenfunktionen in τ kommen vor. Wählen Sie diese geschickt, so daß man y_1 einfach ausrechnen kann.

3.5. (Probleme mit "turning points")

a) Betrachten Sie für kleine $\varepsilon > 0$ das Problem

$$-\varepsilon y'' + xy' + y = 1, \qquad x \in (-1, 1), \qquad y(-1) = y(1) = 0.$$

Überlegen Sie sich, wie Sie die Funktionen y_i der äußeren Entwicklung $\sum_i \varepsilon^i y_i$ bestimmen können. *Hinweis:* die reduzierte Gleichung ist erster Ordnung, aber Sie dürfen keine Randbedingungen stellen.
An welchen Stellen erwarten Sie Grenzschichten?

b) Betrachten Sie für kleine $\varepsilon > 0$ das Problem

$$-\varepsilon y'' - xy' + y = 1, \qquad x \in (-1, 1), \qquad y(-1) = y(1) = 0.$$

Konstruieren sie eine Funktion y_0 mittels geeigneter "äußerer Entwicklungen, die in weiten Bereichen des Intervalls $(-1, 1)$ eine gute Approximation an y liefert. Wo erwarten Sie nun Grenzschichten? Auf welcher Längenskala erwarten Sie diese Grenzschichten?