Serie 4

Besprechung: Donnerstag, 6.12.12

4.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie die Aussage, daß eine Deformation φ genau dann die Form $\varphi(x) = Qx + a$ für eine orthogonale Matrix Q und ein $a \in \mathbb{R}^3$ hat, wenn für den Cauchy-Greenschen Tensor C gilt: $C = (\nabla\varphi)^\top \nabla\varphi \equiv I$. Gehen Sie für die Aussage: "$C = I$ impliziert $\varphi = Qx + a$" so vor, daß Sie die folgenden Teilaufgaben bearbeiten. Sie dürfen der Einfachheit halber annehmen, daß die Funktion φ injektiv ist, genauer: $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ ist ein C^1-Diffeomorphismus[1]

- **a)** Zeigen Sie, daß φ Längen erhält, d.h. $\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_2 = \|x - y\|_2$ für alle $x, y \in \Omega$.
- **b)** Betrachten Sie die Hilfsfunktion $G(x, y) := \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_2^2 - \|x - y\|_2^2$. Zeigen Sie durch Differenzieren nach y_i und x_j, daß

$$-\sum_k \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_j} + \delta_{ij} = 0.$$

  Dies impliziert $(\nabla\varphi(y))^\top \nabla\varphi(x) = I$.
- **c)** Schließen Sie, daß $\nabla\varphi$ konstant sein muß. Schließen Sie auf $\varphi(x) = Qx + a$.

4.2. Ziel ist der Beweis der folgenden Aussage: Für Gebiete Ω und $u \in (H^1(\Omega))^3$ impliziert $\varepsilon(u) = 0$ die Strukturausage $u(x) = Ax + b$, wobei $b \in \mathbb{R}^3$ und $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ schiefsymmetrisch ist.

- **a)** Zeigen Sie die gewünschte Aussage für $u \in C^\infty(\Omega)$, indem Sie zeigen, daß

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = 0$$

- **b)** Sei ρ_ε der "übliche" Glättungskern zur Skala ε (d.h. $\rho_\varepsilon(r) = \varepsilon^{-3}\rho_1(r/\varepsilon)$, wobei ρ_1 eine glatte, univariate Funktion mit $\int_{\mathbb{R}^3} \rho_1(\|y\|_2)\, dy = 1$ und $\rho_1(r) = 0$ für $r \geq 1$ ist). Definieren Sie $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \,|\, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Zeigen Sie:

$$\nabla(u \star \rho_\varepsilon) = (\nabla u) \star \rho_\varepsilon \qquad \text{auf } \Omega_\varepsilon,$$

  wobei bei der Faltung u (bzw. ∇u) durch Null auf $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ fortgesetzt wird.
- **c)** Zeigen Sie die Aussage für $u \in (H^1(\Omega))^3$. Sie dürfen verwenden, daß $u \star \rho_\varepsilon \to u$ in $L^2(\Omega)$ (und auch in $H^1(\Omega)$).

4.3. In der Elastizitätstheorie ist das Energiefunktional $A \mapsto W(A)$ auf (einer Teilmenge) der Menge der Matrizen definiert. Konvexität (von Funktionalen, Mengen) ist bei Minimierungsaufgaben ein wichtiges Hilfsmittel. Zeigen Sie folgende negative Aussage: Die Menge $M := \{A \in \mathbb{R}^{d\times d} \,|\, \det A > 0\}$ ist *nicht* konvex.

4.4. Bei speziellen Geometrien ("Platten", "Schalen") sind spezielle Gleichungen üblich, die sich durch Vereinfachungen aus den (linearen) Elastizitätsgleichungen ergeben. Sei $\Omega = \omega \times (-t/2, t/2)$, wobei die Mittelfläche $\omega \subset \mathbb{R}^2$ und $t > 0$ die Dicke bezeichnet.

Machen Sie folgende Annahmen ("Annahmen von Reissner und Mindlin")

- Es greifen keine Oberflächekräfte angreifen sondern nur Volumskräfte f, welche von der Form $f(x, y, z) = f(x, y)(0, 0, 1)^\top$ sind.
- Die Spannung σ_{33} erfüllt $\sigma_{33} = 0$ in Ω
- Die Verschiebungen haben die Form

$$u_i(x, y, z) = -z\theta_i(x, y), \qquad i \in \{1, 2\}, \qquad u_3(x, y, z) = w(x, y)$$

[1] sonst argumentiert man lokal und fügt die lokalen Aussagen zusammen

Zeigen Sie: Indem Sie diesen Ansatz in die Minimierungsaufgabe der linearen Elastizität einsetzen, erhalten Sie eine Minimierungsaufgabe, bei der das Funktional Π minimiert wird, welches von der folgenden Form ist:

$$\begin{aligned} \Pi(\theta, w) &:= \frac{t^3}{12} a(\theta,\theta) + \frac{\mu t}{2} \int_\omega |\nabla w - \theta|^2 \, dx_1 \, dx_2 - t \int_\omega f w \, dx_1 \, dx_2 \\ a(\theta, \psi) &:= \mu \int_\omega \varepsilon(\theta) : \varepsilon(\psi) \, dx_1 \, dx_2 + \frac{\lambda}{2} \frac{1}{\lambda + 2\mu} \operatorname{div} \theta \operatorname{div} \psi \, dx_1 \, dx_2 \end{aligned}$$

und $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Wir definieren natürlich die 2×2-Matrix $\varepsilon(\theta)$ durch $(\varepsilon(\theta))_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \theta_j}{\partial x_i})$

Bemerkung: Man kann noch eine weitere Vereinfachung machen, die sog. "Kirchhoff" (oder: "Kirchhoff-Love") Annahme. Bei der sind Linien, die vor Deformation senkrecht auf der Mittelfläche waren, auch nach der Deformation senkrecht auf der (deformierten) Mittelfläche. Damit ist

$$\theta_i(x,y) = \frac{\partial w}{\partial x_i}(x,y), \qquad u_i(x,y) = z \frac{\partial w}{\partial x_i}, \qquad i = 1,2;$$

einsetzen in die Minimierungsaufgabe führt auf eine skalare Gleichung 4. Ordnung.

4.5. Prüfen Sie die folgende Variante der Greenschen Formel:

$$\int_\Omega \tau : \varepsilon(v) \, dx = - \int_\Omega v \cdot \operatorname{div} \tau \, dx + \int_{\partial\Omega} v\tau \cdot n \, ds_x,$$

wobei τ und v hinreichend glatt sind und τ symmetrisch ist.