Serie 5

Besprechung: Donnerstag, 20.12.12

5.1. (Homogenisierung in 1D) Sei $\Omega = (0,1)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Sei $A \in C^1(\mathbb{R})$ positiv auf $\mathbb{R}$ und zusätzlich 1-periodisch. Betrachten Sie

$$-(A(x/\varepsilon)u')' = f \qquad \text{auf } \Omega, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

a) Geben Sie die homogenisierte Gleichung an.

b) Bestimmen Sie die "first order approximation" $u_0(x) + \varepsilon u_1(x)$ für die konkrete Wahl

$$f(x) \equiv 1, \qquad A(x) = \frac{1}{2 + \cos(2\pi x)}$$

c) Geben Sie an, welche Größenordnung $O(\varepsilon^\alpha)$ Sie im Beispiel b) für das Volumen- und Randresiduum erwarten.

5.2. Sei $A \in C^1(\mathbb{R}^d)$ punktweise symmetrisch und positiv definit. Sei A weiters $Y := [0,1)^d$-periodisch.

Wir zeigen hier: Die homogensierte Matrix A^0 ist SPD.

Seien hierzu die Funktionen χ_j aus der VO definiert durch

$$-\nabla \cdot (A\nabla\chi_j) = -\sum_i \partial_{y_i} A_{ij}, \qquad \chi_j \text{ ist } Y\text{-periodisch}$$

und e_j der j-te Einheitsvektor. Definieren Sie weiters

$$w_j(y) := y_j - \chi_j(y)$$

a) Zeigen Sie:

$$A^0_{ij} = \int_Y (A(y)\nabla w_i) \cdot \nabla w_j \, dy \tag{1}$$

(d.h. A^0 ist symmetrisch). Zeigen Sie hierzu folgende Aussagen:

$$\begin{aligned}
\int_Y (A\nabla\chi_j) \cdot \nabla v \, dy &= \int_Y (Ae_j) \cdot \nabla v \, dy \qquad \forall v \in H^1_{per}(Y) \\
\int_Y (A\nabla w_j) \cdot \nabla\chi_i \, dy &= 0 \\
A^0_{ij} &= \int_Y (A\nabla w_j) \cdot \nabla y_i \, dy
\end{aligned}$$

b) Verwenden Sie die positive Definitheit von A und die Darstellung (1) um zu zeigen:

$$(A^0\xi) \cdot \xi \geq c\|\xi\|_2^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$$

für ein $c > 0$.

5.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, welches $Y := [0,1)^d$-periodisch ist. Definieren Sie $g_\varepsilon(x) := g(x/\varepsilon)$. Zeigen Sie: Die Folge $(g_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ konvergiert schwach in $L^2(\Omega)$ gegen den Y-Mittelwert $\langle g \rangle$.

5.4. Sei $\Omega = (0,1)$. Geben Sie zwei Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n \subset L^\infty(\Omega)$ an, die schwach (in $L^2(\Omega)$) gegen Grenzwerte a und $b \in L^2(\Omega)$ konvergieren, aber deren Produkt $(a_n b_n)_n$ *nicht* schwach gegen ab konvergiert.

5.5. **a)** Sei $(g_n)_n \subset L^2(\Omega)$ eine gegen $g \in L^2(\Omega)$ schwach konvergente Folge und $(f_n)_n \subset L^2(\Omega)$ eine gegen $f \in L^2(\Omega)$ stark konvergente Folge. Sei $\varphi \in L^\infty(\Omega)$. D.g.:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n(x)\varphi(x)f_n(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x)f(x)\,dx$$

b) Sei $(f_n)_n \subset L^2(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Dann gilt:

$$f_n \to f \qquad \iff f_n \rightharpoonup f \quad \text{und } \|f_n\|_{L^2} \to \|f\|_{L^2}$$

5.6. Sei wie oben $A \in C^1(\mathbb{R}^d)$ Y-periodisch und punktweise symmetrisch positiv definit und A^0 die homogenisierte Matrix. Schreiben Sie $A^\varepsilon(x) := A(x/\varepsilon)$. Definieren Sie für $f \in L^2(\Omega)$ die Funktionen $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ und $u^0 \in H_0^1(\Omega)$ (hier gleich variationell formuliert) durch

$$\int_\Omega (A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon)\cdot v\,dx = \int_\Omega fv\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2}$$

$$\int_\Omega (A^0 \nabla u^0)\cdot v\,dx = \int_\Omega fv\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3}$$

a) Zeigen Sie die “Konvergenz der Energie”, d.h.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega (A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon)\cdot u^\varepsilon\,dx = \int_\Omega (A^0 \nabla u^0)\cdot \nabla u^0\,dx$$

b) Zeigen Sie [1]

$$\int_\Omega (A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon)\cdot \nabla u^\varepsilon \varphi\,dx \to \int_\Omega (A^0 \nabla u^0)\cdot \nabla u^0 \varphi\,dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Hinweis: Verwenden Sie Testfunktionen $u^\varepsilon\varphi$ und $u^0\varphi$.

c) Was passiert, wenn man die feste Funktion f in (2) ersetzt durch eine Funktionenfolge $(f_\varepsilon)_\varepsilon$, welche schwach (in $L^2(\Omega)$) gegen $f \in L^2(\Omega)$ konvergiert?

5.7. *Vorbemerkung:* Wenn man den Beweis des Satzes von Tartar durchgeht, sieht man, daß man die feste rechte Seite $f \in L^2(\Omega)$ durch eine Folge $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ mit $f_\varepsilon \rightharpoonup f \in L^2(\Omega)$ ersetzen kann.

Betrachten Sie A^ε wie in Aufg. 6 und eine Funktion $a_0 \in C(\mathbb{R}^d)$, welche Y-periodisch und nichtnegativ sei. Schreiben Sie $a_0^\varepsilon(x) := a_0(x/\varepsilon)$. Definieren Sie (für $f \in L^2(\Omega)$) u^ε als Lösung von[2]

$$\int_\Omega (A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon)\cdot \nabla v + a_0^\varepsilon u^\varepsilon v\,dx = \int_\Omega fv\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Geben Sie die “homogenisierte” Gleichung an, die der Limes $u^0 := \lim_\varepsilon u^\varepsilon$ erfüllt.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie Sie die “Vormberkung” oben einsetzen können.

[1] vornehm ausgedrückt: $(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon)\nabla u^\varepsilon \to (A^0\nabla u^0)\cdot\nabla u^0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$

[2] d.h. $-\nabla\cdot(A^\varepsilon\nabla u^\varepsilon) + a_0^\varepsilon u^\varepsilon = f$ in Ω mit $u^\varepsilon = 0$ auf $\partial\Omega$