Serie 6

Besprechung: Donnerstag, 24.1.13

6.1. Sei $A = \mathrm{diag}(-1, -d)$ mit $d > 0$. Finden Sie ein $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so daß

$$x' = Ax \quad \text{und} \quad x' = Bx$$

stabil sind, aber $x' = (A+B)x$ instabil.

6.2. Betrachten Sie das folgende nichtlineare System:

$$\begin{aligned} u_t &= a - (b+1)u + u^2 v + d_u \Delta u \\ v_t &= bu - u^2 v + d_v \Delta v, \end{aligned}$$

mit a, $b \in \mathbb{R}$ und d_u , $d_v > 0$. Berechnen Sie die räumlich homogenen stationären Lösungen (u_0, v_0). Was müssen a, b, d_u , d_v erfüllen, damit Turing-Instabilität auftreten kann? Skizzieren Sie für $\frac{d_u}{d_v} = 1$ den Bereich der möglichen Parameter (a, b) in (a, b)-Ebene.

6.3. Betrachten Sie die Linearisierung

$$w_t = Aw + D\Delta w, \qquad \partial_n w = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

einer Reaktions-Diffusions Gleichung $u_t = f(u) + D\Delta u$ auf einem Gebiet Ω mit homogenen Neumann-Randbedingungen. Hier ist w vektorwertig: $w(x,t) \in \mathbb{R}^n$. Die Diagonalmatrix D sei positiv semidefinit und für alle Eigenwerte λ der reellen Matrix $A + A^T$ gelte $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. Zeigen Sie, dass $w^T Aw \leq -\delta w^T w$ ist für ein $\delta > 0$ und daß

$$E(t) := \int_\Omega w^T w \, dx \to 0 \qquad \text{für } t \to \infty.$$

Es können also keine räumlichen Muster ausgebildet werden.

6.4. Die freie Energie der Cahn-Hilliard Gleichung auf $\Omega = (0, l) \subset \mathbb{R}$ ohne Regularisierung (d.h. $\gamma = 0$) lautet:

$$E(c) = \int_\Omega f(c)\, dx.$$

Es sei nun f ein Doppelmuldenpotential mit $f(c) = \gamma_2 c^4 + \gamma_1 c^3 + \gamma_0 c^2$ und $\gamma_2 > 0$ sowie $\gamma_0 < 0$. Zeigen Sie, daß es eine stückweise konstante Funktion u gibt, die E unter der Nebenbedingung

$$\int_\Omega u(x) dx = 0$$

minimiert. *Hinweis:* Überlegen Sie sich, daß f zwei (globale) Minima an den Stellen c_1, c_2 mit $c_1 < 0 < c_2$ hat. Wie würden Sie vorgehen, wenn $f(c_1) = f(c_2)$? Falls $f(c_1) \neq f(c_2)$, betrachten Sie $\widetilde{E}(c)$ mit $\widetilde{f}(c) = f(c) - \alpha c$ für geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}$.

6.5. Sei $\Omega = (0, \infty)$. Sei T_M die Schmelztemperatur einer Flüssigkeit. Lösen Sie folgendes "one phase" Stefanproblem, wobei $x = a(t)$ die Phasengrenze bescheibt.

$$\begin{aligned} &\rho c_V \partial_t T - \lambda \partial_x^2 T = 0 \qquad \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ &T = T_M \quad \text{und} \quad \lambda \partial_x T = \rho L a'(t) \quad \text{für } x = a(t) \\ &T(x, 0) = T_M \\ &T(0, t) = T_0 < 0. \end{aligned}$$

D.h.: die Starttemperatur ist die Schmelztemperatur und man kühlt bei $x = 0$. Sie setzen $a(0) = 0$. *Hinweis:* Machen Sie eine Ähnlichkeitsansatz für T: $T(x,t) = T_0 + (T_M - T_0)\widetilde{T}(z)$, $z = \sqrt{c_V \rho/(4\lambda)}\, x/\sqrt{t}$.

6.6. **a)** Sei für $R > 0$ $I_R = [0, R]$. Zeigen Sie (z.B. mittels des Mittelwertsatzes), daß es eine Konstante $C > 0$ gibt (unabhängig von R), so daß

$$\|u'\|_{L^\infty(I_R)} \le C\left[R^{-1}\|u\|_{L^\infty(I_R)} + R\|u''\|_{L^\infty(I_R)}\right] \qquad \forall u \in C^2(I_R)$$

b) Sei $I = [0, 1]$. Zeigen Sie: Für $u \in C^2(I)$ mit $\|u''\|_{L^\infty(I)} > 0$ gilt

$$\|u'\|_{L^\infty(I)} \le 2C\sqrt{\|u\|_{L^\infty(I)}\|u''\|_{L^\infty(I)}}.$$

Hinweis: betrachten Sie eine geeignete Hilfsfunktion $\widetilde{u}$ auf einem Intervall $(0, R)$ und optimieren Sie anschließend R.

c) Schließen Sie auf die sog. "Interpolationsabschätzung"

$$\|u'\|_{L^\infty(I)} \le C'\sqrt{\|u\|_{L^\infty(I)}}\sqrt{\|u\|_{L^\infty(I)} + \|u''\|_{L^\infty(I)}} \qquad \forall u \in c^2(I).$$

Bemerkung: Diese Technik durch "Skalierungsargumente" multiplikative Abschätzungen zu erhalten tritt auch bei Sobolevräumen auf.

6.7. **a)** Sei A ein linearer, beschränkter Operator auf einem Hilbertraum X mit $\langle Ax, x\rangle \ge 0$ für alle $x \in X$, wobei Gleichheit nur für $x = 0$ auftreten kann. Sei K eine abgeschlossene konvexe Teilmenge. Betrachten Sie die Variationsungleichung: Finde $x^* \in K$, so daß

$$\langle Ax^*, x - x^*\rangle \ge \langle f, x - x^*\rangle \qquad \forall x \in K.$$

Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Lösung.

b) Sei $D = \Omega \times (0, T)$ mit $\Omega = (0, R)$. Sei K die konvexen Menge $K = \{v \in L^2(D) \,|\, v \ge 0 \text{ f.ü. auf } D\}$. Betrachten Sie folgende Variationsungleichung (eine abgespeckte Version des "one phase Stefan problem"): Finde $u \in L^2(0, T; H^2(0, R))$ mit $u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ und $u \in K$ so daß für alle $v \in K$:

$$\begin{aligned}
&(u_t - u_{xx})(v - u) \ge f(v - u) \qquad \text{f.ü. auf } D\\
&u(0, t) = g(t), \qquad u(R, t) = 0\\
&u(\cdot, 0) = u_0(\cdot)
\end{aligned}$$

Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Lösung.