Serie 1

Besprechung: Donnerstag, 15.10.14

1.1. Betrachten Sie das "Anfangswertproblem"

$$xu_y - yu_x = u \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \qquad u(x,0) = h(x)$$

1.2. Betrachten Sie ein Anfangswertproblem für eine skalare Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von der Form

$$\partial_t u + \nabla \cdot (\mathbf{f}(u)) = 0 \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \qquad u(\cdot, 0) = u_0(\cdot).$$

wobei $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ hinreichend glatt ist.

a) Formulieren Sie den Begriff der schwachen Lösung für dieses Problem.

b) Formulieren Sie die Rankine-Hugoniot-Bedingung an der Unstetigkeitsstelle, falls u eine stückweise glatte Lösung der Gleichung ist. Sie dürfen annehmen, daß die Unstetigkeitsstelle von der Form $\{(\psi_1(t), \psi_2(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$ für hinreichend glatte Funktionen ψ_1, ψ_2 ist.

1.3. **a)** Sei $u_0(x) = u_l$ für $x < 0$ und $u_0(x) = u_r$ für $x > 0$ wobei $u_l < u_r$. Zeigen Sie: Für jedes u_m mit $u_l \leq u_m \leq u_r$ und $s_m = (u_l + u_m)/2$ ist die Funktion

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x < s_m t \\ u_m & s_m t \leq x \leq u_m t \\ x/t & u_m t \leq x \leq u_r t \\ u_r & x > u_r t \end{cases}$$

eine schwache Lösung der Burgers Gleichung $\partial_t u + \partial_x f(u)) = 0$ mit $f(u) = \frac{1}{2}u^2$. Skizzieren Sie die Charakteristiken. Geben Sie weitere schwache Lösungen mit 3 Unstetigkeitslinien an.

b) Oft hat die Variable u in der Burgersgleichung (d.h. $f(u) = \frac{1}{2}u^2$) die Bedeutung einer Geschwindigkeit. Zeigen Sie, daß (zumindest für glatte Lösungen) die Burgersgleichung die Galileoinvarianz hat, d.h. wenn $u = u(x,t)$ eine Lösung ist, dann für festes $v_0 \in \mathbb{R}$ auch die Funktion $\widetilde{u}(x,t) := v_0 + u(x - v_0 t, t)$ eine Lösung.

1.4. Betrachten Sie das Riemannproblem aus Aufg. 3 aber diesmal mit $u_l > u_r$. Zeigen Sie:

a) Es gibt keine schwachen Lösungen, die aus genau 2 Schocks besteht.

b) Es gibt jedoch schwache Lösungen, die aus 3 Schocks bestehen.

1.5. Zeigen Sie, daß eine klassische Lösung der Burgersgleichung auch eine Lösung der Gleichung

$$\partial_t(u^2) + \partial_x \left(\frac{2}{3}u^3\right) = 0 \tag{1}$$

ist. Zeigen Sie, daß im Fall $u_l > u_r$ die Schocklösung des Riemannproblems für die Burgersgleichung *nicht* eine schwache Lösung von (1) ist. Geben Sie Schocklösungen von (1) an.

1.6. Betrachten Sie die Burgersgleichung.

a) Betrachten Sie die Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Geben Sie die[1] Lösung an. Skizzieren Sie die Charakteristiken und die Schockkurven.

[1] gemeint ist natürlich die Entropielösung, die hier aus Schocks besteht

b) Betrachten Sie die Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Lösung (zumindest für kleine Zeiten t).