Serie 2

Besprechung: Mittwoch, 22.10.14

2.1. Sei $\Phi_{\geq 0} = \{\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \,|\, \varphi \geq 0\}$. Sei $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ und $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Sei f hinreichend glatt. Definieren Sie auf $\Phi_{\geq 0}$ für jedes Entropie-Entropiefluß-Paar (η, ψ) das Funktional

$$\Lambda_{(\eta,\psi)}(\varphi) := \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \eta(u)\varphi_t + \psi(u)\varphi_x + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0)\varphi(\cdot, 0).$$

a) Sei ρ_ε der "übliche" "Mollifier" und $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^2)$ mit $\varphi \geq 0$. Zeigen Sie: $\varphi_\varepsilon := \varphi * \rho_\varepsilon$ ist glatt, erfüllt $\varphi_\varepsilon \geq 0$ und $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ (in L^1).

b) Zeigen Sie: falls für $\eta(u) = u$ (und entsprechend $\psi(u) = f(u)$) und $\eta(u) = -u$ (und entsprechend $\psi(u) = -f(u)$) die Beziehung $\Lambda_{(\eta,\psi)}(\varphi) \geq 0$ für alle $\varphi \in \Phi_{\geq 0}$ gilt, dann ist u eine schwache Lösung.
Hinweis: Überlegen Sie sich, daß eine beliebige Funktion $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ als $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ geschrieben werden kann mit φ^+, $\varphi^- \geq 0$; glätten Sie anschließend φ^+ und φ^-.

2.2. Betrachten Sie stückweise konstante Funktionen der Form

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x < st \\ u_r & x > st. \end{cases} \tag{1}$$

a) Zeigen Sie: damit eine solche Funktion eine Entropielösung ist, muß s durch die Rankine-Hugoniot-Bedingung gegeben sein und zudem

$$s(\eta(u_r) - \eta(u_l)) \geq \psi(u_r) - \psi(u_l)$$

für alle Entropie-Entropiefluß-Paare (η, ψ) gelten.

b) Zeigen Sie für die Burgersgleichung $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ und $u_l > u_r$, daß die durch (1) gegebene Funktion eine Entropielösung ist, falls s durch die RH-Bedingung gegeben ist.

c) Zeigen Sie für die Burgersgleichung und $u_l < u_r$, daß die durch (1) gegebene Funktion zwar eine schwache Lösung ist, nicht aber eine Entropielösung (*Hinweis:* $\eta(u) = u^2$).

2.3. **a)** (Cole-Hopf Transformation). Leiten Sie die Formel

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-y}{t} e^{-G(x,t;y)/(2\varepsilon)}\, dy}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-G(x,t;y)/(2\varepsilon)}\, dy} \\ G(x,t;y) &= \frac{(x-y)^2}{2t} + \int_0^y u_0(\xi)\, d\xi \end{aligned}$$

für die Lösung u der viskosen Burgersgleichung

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \qquad u(x,0) = u_0(x) \tag{2}$$

her. Hinweis: Betrachten Sie die Substitution

$$u = -2\varepsilon \frac{\varphi_x}{\varphi}$$

und benutzen Sie die Lösungsformel für die Wärmeleitungsgleichung: Die Funktion

$$\varphi(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) e^{-(x-y)^2/(4\varepsilon t)}\, dy$$

löst

$$\varphi_t - \varepsilon\varphi_{xx} = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \qquad \varphi(\cdot, 0) = \Phi(\cdot).$$

b) Sei $u_0(x) = 0$ für $|x| > 1$ und $u_0(x) = -\mathrm{sign}(x)$ für $|x| < 1$. Geben Sie die exakte Lösung der (nichtviskosen) Burgersgleichung für $t = 0.5$ im Intervall $(-1, 1)$ an. Plotten Sie die Viskositätslösung im Intervall $(-0.8, 0.8)$ für $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$ und $t = 0.9$ mithilfe von z.B. Maple oder Mathematica.

2.4. Lösungen von (2) von der Form $u(x,t) = w(x - st)$ (mit $s \in \mathbb{R}$) heißen "travelling wave" Lösungen. Zeigen Sie: Für u_l, $u_r \in \mathbb{R}$ liefert das Profil

$$w(x) = u_r + \frac{1}{2}(u_l - u_r)\,[1 - \tanh((u_l - u_r)x/(4\varepsilon))]$$

eine "travelling wave". Was ist s? Skizzieren Sie das Profil $w(x)$ für verschiedene Werte von ε.