Serie 3

Besprechung: Mittwoch, 29.10.14

3.1. Die Flachwassergleichungen sind gegeben durch

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} hv \\ \frac{1}{2}v^2 + gh \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Zeigen Sie, daß das System hyperbolisch ist (im Sinn von Def. 1.1).

3.2. Betrachten Sie die Burgersgleichung

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x(u^2) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \qquad u(\cdot,0) = u_0(\cdot).$$

a) Geben Sie den Entropiefluß ψ zur Entropie $\eta(u) = \frac{1}{2}u^2$ an.

b) Sei u_0 beschränkt und habe kompakten Träger. Nehmen Sie an, daß die Entropielösung u ebenfalls beschränkt ist und (wie in der VO) die Bedingung $u \in C^0([0,\infty); L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))$ erfüllt. Zeigen Sie, daß

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

gilt. *Hinweis:* Verwenden Sie die Testfunktion $\psi \approx \chi_K$ aus dem Beweis von Satz 1.18 and betrachten Sie $0 < t_1 < t_2$ dort und anschließend $t_1 \to 0$.
Bemerkung: i.A. gilt *nicht* $\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,0) - v(\cdot,0)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ für Entropielösungen u, v.

3.3. In der VO wurde folgende Monotonieeigenschaft für Entropielösungen behauptet: $u_0 \leq v_0$ impliziert $u(\cdot,t) \leq v(\cdot,t)$. Zeigen Sie diese Aussage mit den Techniken aus dem Satz 1.18 der VO. *Hinweise:*

1. Überlegen Sie sich, daß 2 Entropielösungen u, v die folgende Gleichung erfüllen:

$$0 = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} (u-v)\varphi_t + (f(u) - f(v))\varphi_x + \int_{\mathbb{R}} (u-v)(\cdot,0)\varphi(\cdot,0) \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^2).$$

2. Überlegen Sie sich aus dem Beweis von Satz 1.18, daß für die Funktion $\Phi(u) := |u| + u$ und eine geeignete lipschitzstetige Funktion $(u,v) \mapsto \Psi(u,v)$ gilt:

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \Phi(u-v)\varphi_t + \Psi(u,v)\varphi_x + \int_{\mathbb{R}} \Phi(u-v)(\cdot,0)\varphi(\cdot,0) \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^2), \quad \varphi \geq 0.$$

3. Zeigen Sie gewünschte Aussage mittels geeigneter Testfunktionen φ.

3.4. Betrachten Sie die folgende skalare Erhaltungsgleichung mit einem Term nullter Ordnung:

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = g(u) \qquad \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

wobei f, g glatte (beschränkte) Funktionen seien. Geben Sie die Rankine-Hugoniot-Bedingung an.