Serie 4

Besprechung: Mittwoch, 5.11.14

4.1. Die Abbildung $\Omega \ni X \mapsto x(t,X)$ von Lagrange- zu Eulerkoordinaten sei glatt und invertierbar. Definieren Sie $\mathbf{A}(t,X)$ durch $\mathbf{A}_{ij}(t,X) = \frac{\partial_i x(t,X)}{\partial X_j}$. Setzen Sie $J(t,X) = \det \mathbf{A}(t,X)$. Zeigen Sie:

$$\nabla_X \cdot (J\mathbf{A}^{-T}) \equiv 0. \tag{1}$$

Obwohl dies "direkt" nachrechenbar ist, sollen Sie wie folgt vorgehen: Sei $\overline{\eta} \in C_0^\infty(\Omega)$ und definieren Sie $\eta(t,x)$ durch $\eta(t,x) = \overline{\eta}(X(t,x))$. Zeigen Sie:

$$\int_\Omega \nabla_X \cdot (J(t,X)\mathbf{A}^{-T}(t,X))\overline{\eta}(X)\,dX = -\int_{\Omega(t)} \nabla_x \eta(t,x)\,dx.$$

Schließen Sie mittels dieser Beziehung auf (1).

4.2. Zeigen Sie, daß der Spannungstensor σ symmetrisch ist, falls der Drehimpulserhaltungssatz in der folgenden Form gültig ist:

$$\int_{\Omega(t)} x \times \big(\partial_t(\rho v) + \mathrm{Div}(\rho v v^\top)\big)\,dx = \int_{\Omega(t)} x \times (\rho f)\,dx + \int_{\partial\Omega(t)} x \times (\sigma n)\,ds_x$$

für alle (geeigneten) "Startvolumina" $\Omega = \Omega(t_0) \subset \mathbb{R}^3$. Gehen Sie wie folgt vor (Sie dürfen im Folgenden die Identität $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$ verwenden):

a) Sei $a \in \mathbb{R}^3$ ein fester Vektor. Zeigen Sie, daß

$$a \cdot \int_{\partial\Omega(t)} x \times (\sigma n)\,ds_x = \int_{\Omega(t)} (a \times x) \cdot \mathrm{Div}\,\sigma + \sum_{i,j=1}^3 \partial_j\,(a \times x)_i\,\sigma_{ij}\,dx.$$

b) Zeigen mittels des Impulserhaltungssatzes und des oben formulierten Drehimpulserhaltungssatzes, daß

$$\sum_{i,j=1}^3 \partial_j\,(a \times x)_i\,\sigma_{ij} = 0$$

gilt. (Sie dürfen natürlich annehmen, daß alle auftretenden Funktionen hinreichend glatt sind).

c) Zeigen Sie die Symmetrie von σ durch geeignete Wahl von a.

4.3. Zeigen Sie, daß eine Lösung der inkompressiblen Eulergleichungen

$$\nabla \cdot v = 0, \qquad \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \qquad \partial_t(\rho v) + \mathrm{Div}(\rho v v^\top) + \nabla p = \rho f$$

automatisch die "Energiegleichung"

$$\partial_t(\frac{1}{2}\rho|v|^2) + \nabla \cdot (\frac{1}{2}\rho|v|^2 v + pv) = \rho f \cdot v$$

erfüllt. Was folgt daraus für die Energiegleichungen?

4.4. Sei $\widehat{\sigma} : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ eine Funktion mit der Eigenschaft:

$$\widehat{\sigma}(\partial_t Q Q^\top + QAQ^\top) = Q\widehat{\sigma}(A)Q^\top$$

für alle glatten matrixwertigen Funktionen $Q : \mathbb{R} \to O(d)$, wobei $O(d)$ die Menge der orthogonalen $d \times d$-Matrizen ist mit Determinante 1. Zeigen Sie:

$$\widehat{\sigma}(A) = \widehat{\sigma}(\frac{1}{2}(A + A^\top)).$$

Hinweis: Sei W eine schiefsymmetrische Matrix und $Q(t) := e^{-tW}$. Zeigen Sie: $Q(t) \in O(d)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Überlegen Sie sich, daß $\widehat{\sigma}(-W + A) = \widehat{\sigma}(A)$ folgt. Wählen Sie W.