Serie 5

Besprechung: Mittwoch, 12.11.14

5.1. (Kelvin's Circulation Theorem) Sei $C \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine geschlossene (hinreichend glatte) Kurve. Sei $C(t)$ die transportierte Kurve, d.h. $C(t) = \varphi(t, C)$. Sei $\mathbf{v}$ das Geschwindigkeitsfeld. Bezeichnen Sie mit $D_t f(t,x) := \partial_t f + \nabla f \cdot \mathbf{v}$ die materielle Ableitung der skalaren Funktion f; die materielle Ableitung einer vektorwertigen Funktion ist komponentenweise zu verstehen. Die Zirkulation ist das Linienintegral

$$\Gamma_{C(t)} = \oint_{C(t)} \mathbf{v}(t,x) \cdot d\mathbf{s}.$$

a) Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dt} \oint_{C(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C(t)} D_t \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}.$$

b) Betrachten Sie eine Strömung mit $\rho = const$[1]. Folgern Sie aus der Impulserhaltungsgleichung, daß, falls keine äußeren Kräfte angreifen, die Zirkulation konstant in der Zeit für jede (hinreichend glatte) geschlossene Kurve C ist.

c) Sei $d = 3$. Definieren Sie die *Wirbelstärke* ω einer Strömung durch

$$\omega := \nabla_x \times \mathbf{v} = \mathrm{rot}_x \mathbf{v}.$$

Betrachten Sie eine Strömung mit $\omega(0,\cdot) = 0$. Zeigen Sie unter den Voraussetzungen von Teilaufg. b), daß dann sogar $\omega(t,\cdot) = 0$ für $t > 0$.

Bemerkung: Falls das Gebiet einfach zusammenhängend ist, dann ist die Strömung eine *Potentialströmung*, d.h. $\mathbf{v} = \nabla_x \psi$ für eine geeignete skalare Funktion ψ.

5.2. (Gesetz von Hagen-Poiseuille) Betrachte eine viskose, kompressible, homogene Strömung in einem Rohr

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < x_1 < L, \quad x_2^2 + x_3^2 < R^2\}$$

der Länge L mit Radius R, welche durch eine Druckdifferenz getrieben wird.

a) Lösen Sie die stationären Navier-Stokesgleichungen

$$\nabla \cdot v = 0, \qquad -\eta \Delta v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p = 0$$

unter der Annahme, daß v die Bauart $v = (v_1(r), 0, 0)$ mit $r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ hat. Nehmen Sie weiters an, daß der Druck bei $x_1 = 0$ den Wert p_1 und bei $x_1 = L$ den Wert p_2 hat. Nehmen Sie an, daß $v(R) = 0$.

b) Berechnen Sie die Durchflußrate durch das Rohr.

5.3. (Potentialströmungen) Eine Strömung v heißt *Potentialströmung*, falls $v = \nabla \varphi$ (für eine skalarwertige Funktion φ, das sog. *Potential*).

a) Zeigen Sie $\nabla \times v = 0$.

b) Zeigen Sie, daß für inkompressible Strömungen das Potential φ die Laplacegleichung $-\Delta \varphi = 0$ erfüllt.

c) Zeigen Sie den Satz von Bernoulli: Sei v eine reibungsfreie (d.h. $\sigma = -p\,\mathrm{I}$) Potentialströmung mit $f = 0$. Sei C eine Kurve, die die Punkte x_0 und x_1 verbindet. Dann gilt:

$$\left[\varphi_t + \frac{1}{2}|v|^2 \right]_{x_0}^{x_1} + \int_C \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot ds = 0.$$

[1] tatsächlich reicht die folgende, schwächere Voraussetzung: für das Druckfeld p existiert eine Funktion w mit $\nabla w = \frac{1}{\rho} \nabla p$

d) Betrachten Sie eine inkompressible, stationäre Potentialströmung. Zeigen Sie, daß der Druck p (bis auf eine additive Konstante) gegeben ist durch

$$p = -\frac{1}{2}\rho|v|^2 = E_{kin}$$

5.4. Betrachten Sie eine stationäre Strömung zwischen zwei unendlich langen, koaxialen (langsam) rotierenden Kreiszylindern. Die Geometrie damit:

$$\Omega = \{(x, y, z) \,|\, R_1 < r < R_2, \quad z \in \mathbb{R}\}, \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

Das homogene Fluid werde beschrieben durch die inkompressiblen Navier-Stokesgleichungen mit Haftrandbedingungen. Bestimmen Sie eine radialsymmetrische, stationäre Lösung unter der Annahme $f = 0$. D.h.: die Strömung "bewegt" sich nur in der (x, y)-Ebene und ist dort radialsymmetrisch. Insbesondere nehmen Sie an, daß v und p nicht von z abhängen. Es möge der äußere Zylinder die Winkelgeschwindigkeit ω_2 haben und der innere die Winkelgeschwindigkeit ω_1.

Hinweis: Die ODE $y'' + \frac{1}{r}y' - \frac{1}{r^2}y = 0$ hat Lösungen der Form $y(r) = r^\alpha$.