Serie 6

Besprechung: Mittwoch, 19.11.14

6.1. Betrachten Sie das (singulär gestörte) Problem

$$\varepsilon y'' + 2y' + y = e^x, \qquad x \in (0,1), \qquad y(0) = y(1) = 0 \tag{1}$$

für kleine $\varepsilon > 0$.

a) Formulieren Sie die Gleichungen für die "äußere Entwicklung"

b) Formulieren Sie die Gleichungen für die "innere Entwicklung" auf dem Intervall $(0, \varepsilon)$. Verwenden Sie hierzu, daß die rechte Seite $f(x) = e^x$ auf $(0, \varepsilon)$ in der neuen Variable ξ entwickelt werden kann als $f(x) = f(\varepsilon\xi) = f(0) + \varepsilon\xi f'(0) + \cdots$.

c) Bestimmen Sie die Terme y_0, y_1 der äußeren Entwicklung und die Terme Y_0, Y_1 der inneren Entwicklung mittels "matching". Geben Sie eine uniforme Approximation an (nur formal—Sie müssen nicht nachrechnen, daß diese Approximation sinnvoll ist).

6.2. Betrachte Sie folgende gestörte Gleichung

$$-y'' + \varepsilon y' + y = f(x), \qquad x \in (0,1), \qquad y(0) = y(1) = 0$$

für kleine ε.

a) Machen Sie einen Ansatz $y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots$ und leiten Sie geeignete Gleichungen für die Funktionen y_i her.

b) Versuchen Sie, die Entwicklung zu rechtfertigen, d.h. zeigen Sie, daß (unter geeigneten Glattheitsvoraussetzungen an f die endliche Reihe $\sum_{i=0}^N \varepsilon^i y_i$ für kleine ε eine gute Approximation an die exakte Lösung ist. *Hinweis:* Sie dürfen verwenden, daß für die Lösung des Problems

$$-u'' + u = g, \qquad x \in (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

nach Lax-Milgram gilt:

$$\|u'\|^2_{L^2(0,1)} + \|u\|^2_{L^2(0,1)} \le \|g\|^2_{L^2(0,1)}.$$

c) (*) Können Sie auch Aussagen über den punktweisen Fehler machen?

d) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dann existieren alle Terme y_i der äusseren Entwicklung. Konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^\infty \varepsilon^i y_i$?

6.3. Betrachten Sie das singulär gestörte Problem

$$-\varepsilon^2 y'' + y = f(x), \qquad x \in (0,1), \qquad y(0) = y(1) = 0$$

a) Formulieren Sie die Gleichungen für die äußere Entwicklung. Welche Randbedingungen können Sie stellen?

b) Grenzschichten treten nun an beiden Endpunkten $x = 0$ und $x = 1$. Betrachten Sie nur das Verhalten an der Stelle $x = 0$. Für die innere Entwicklung machen Sie den Ansatz $x = \varepsilon^\alpha \xi$ mit $\alpha > 0$. Bestimmen Sie α.

c) Konstruieren Sie so viele Terme der äußeren und inneren Entwicklung, daß Sie eine Approximation $\widetilde{y}$ erhalten, deren Residuum (d.h. sowohl das Volumsresiduum $-\varepsilon^2\widetilde{y}'' + \widetilde{y}$ als auch das Randresiduum $|\widetilde{y}(\pm 1)|$) von der Ordnung $O(\varepsilon^2)$ ist.

d) Der Satz von Lax-Milgram besagt für die Lösung y, daß

$$\varepsilon^2 \|y'\|^2_{L^2(0,1)} + \|y\|^2_{L^2(0,1)} \le \|f\|^2_{L^2(0,1)}.$$

Zeigen Sie damit, daß Sie die von Ihnen bestimmte uniforme Approximation tatsächlich eine sinnvolle Approximation an die exakte Lösung ist.

6.4. (Probleme mit “turning points”)

a) Betrachten Sie für kleine $\varepsilon > 0$ das Problem

$$-\varepsilon y'' + xy' + y = 1, \qquad x \in (-1,1), \qquad y(-1) = y(1) = 0.$$

Überlegen Sie sich, wie Sie die Funktionen y_i der äußeren Entwicklung $\sum_i \varepsilon^i y_i$ bestimmen können. *Hinweis:* die reduzierte Gleichung ist erster Ordnung, aber Sie dürfen keine Randbedingungen stellen.
An welchen Stellen erwarten Sie Grenzschichten?

b) Betrachten Sie für kleine $\varepsilon > 0$ das Problem

$$-\varepsilon y'' - xy' + y = 1, \qquad x \in (-1,1), \qquad y(-1) = y(1) = 0.$$

Konstruieren sie eine Funktion y_0 mittels geeigneter “äußerer Entwicklungen, die in weiten Bereichen des Intervalls $(-1,1)$ eine gute Approximation an y liefert. Wo erwarten Sie nun Grenzschichten? Auf welcher Längenskala erwarten Sie diese Grenzschichten?