Serie 7

Besprechung: Mittwoch, 26.11.14

7.1. Ein bereits entdimensionalisiertes Modell für einen senkrechten Wurf mit *kleinem* Luftwiderstand ist

$$y'' = -1 - \varepsilon(y'(t))^2, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Das Modell beschreibt den Wurf bis zum Erreichen der maximalen Höhe.

a) Berechnen Sie die beiden Koeffizienten $y_0(t)$, $y_1(t)$ der formalen asymptotischen Entwicklung

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \cdots$$

b) Berechnen Sie die Wurfhöhe bis zu Termen der Ordnung ε mit Hilfe einer asymptotischen Entwicklung.

c) Ein alternative Sichtweise für die asymptotische Entwicklung $y(t) \sim y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \cdots$ ergibt sich, indem Sie eine Taylorentwickung der Funktion $y(t, \varepsilon)$ für festes t bei $\varepsilon = 0$ machen:

$$y(t, \varepsilon) = y(t, 0) + \varepsilon \partial_\varepsilon y(t, 0) + \cdots$$

Geben Sie die Anfangswertprobleme an, die von $y(\cdot, 0)$ und $\partial_\varepsilon y(\cdot, 0)$ gelöst werden. Lösen Sie diese.

7.2. **a)** Betrachten Sie die (skalare) Wellengleichung

$$w_{tt} - w_{xx} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Machen Sie eine Dispersionsanalyse, d.h. bestimmen Sie zu gegebener Wellenzahl $k \in \mathbb{R}$ die benötigte Frequenz ω so daß der Anatz $w(x, t) = e^{\mathbf{i}(kx - \omega t)}$ zu einer Lösung führt. Erwarten Sie "solitary waves"? Wie ergeben sich solche aus der d'Alembertschen Lösungsformel?

b) Im Limes $\alpha \ll \beta$ vereinfachen sich die Boussinesq-Gleichungen zu

$$\eta_t + w_x - \frac{1}{6}\beta w_{xxx} = 0$$
$$w_t + \eta_x + \frac{1}{2}\beta w_{xxt} = 0.$$

Leiten Sie die skalare Gleichung

$$w_{tt} - w_{xx} + \frac{1}{6}\beta w_{xxxx} + \frac{1}{2}\beta w_{xxtt} = 0$$

her. Machen Sie eine Dispersionsanalyse indem Sie den Ansatz $w(x, t) = w_0 e^{\mathbf{i}(kx - \omega t)}$ machen, d.h. bestimmen Sie die Dispersionsrelation $\omega = \omega(k)$. Geben Sie ω explizit als Funktion von k an. Erwarten Sie "solitary waves"?

c) Vergleichen Sie die Dispersionsrelationen für die beiden Gleichungen

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \qquad \text{und} \qquad u_t + u_x + u_{xxt} = 0$$

in den Grenzfällen $k \to 0$ und $k \to \infty$.

7.3. Die KdV-Gleichung wurde in der Vorlesung als

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{6}\beta\eta_{xxx} = 0$$

hergeleitet (α, $\beta > 0$). Überlegen Sie sich, daß mittels geeigneter Variablensubstition (für t und x) und Skalierung von η die KdV-Gleichung in die folgende "Standardform" überführt werden kann:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

7.4. Die KdV-Gleichung (1) hat für jedes $c > 0$ eine “Soliton-Lösung”

$$u(x,t) = 3c\frac{1}{\cosh^2(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct))}.$$

Das kann elementar nachgerechnet werden. Um eine Soliton-Lösung “herzuleiten”, machen Sie den Ansatz

$$u(x,t) = U(x-ct), \qquad \lim_{\xi\to\pm\infty} U(\xi) = 0.$$

a) Überlegen Sie sich, daß U die Gleichung

$$U'' + \left[\frac{1}{2}U^2 - cU - A\right] = 0 \tag{2}$$

erfüllen muß für eine Integrationskonstante A. Wählen Sie $A = 0$

b) Schreiben Sie die Gleichung zweiter Ordnung für U als System erster Ordnung. Zeigen Sie, daß es zwei Ruhelagen gibt, einen stabilen Knoten und einen Sattelpunkt.

c) Skizzieren Sie das Phasenportrait (z.B. mit Maple, *phaseportrait*). Warum kann die gesuchte Lösung U nur zu dem homoklinen Orbit gehören, der den Sattelpunkt bei $(0,0)$ mit sich selbst verbindet?

d) Schließen Sie aus (2) (mit $A = 0$) mit U', daß

$$\frac{1}{2}(U')^2 + \frac{1}{6}U^3 - \frac{c}{2}U^2 = E,$$

für eine neue Integrationskonstante E. Überlegen Sie sich mithilfe Ihrer Entscheidung, daß U zum homoklinen Orbit gehört, daß $E = 0$ sein muß.
Bemerkung: Die Substitution $U = v^2$ führt dann auf das separierbare System

$$(v')^2 + \frac{1}{12}v^4 - \frac{c}{4}v^2 = 0,$$

welches mittels cosh geschlossen gelöst werden kann.

7.5. Die KdV-Gleichung (1) hat unendlich viele Erhaltungsgrößen. Zeigen Sie:

$$m_1(u) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx \qquad \text{(das “Volumen” der Welle)}$$
$$m_2(u) := \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)\,dx$$

werden erhalten[1]. *Hinweis:* 1) Sie dürfen annehmen, daß u (und alle benötigten Ableitungen) hinreichend schnell bei $x = \pm\infty$ gegen Null gehen. 2) Versuchen Sie, eine Gleichung für u oder u^2 in der Form $D(u)_t + F(u)_x = 0$ zu schreiben mit $D(u) = u$ im ersten Fall und $D(u) = u^2$ im zweiten Fall. Zum Bestimmen von F im zweiten Fall ist es hilfreich, $(2uu_{xx})_x - ((u_x)^2)_x = 2uu_{xxx}$ zu verwenden.

[1] eine weniger “offensichtliche” Erhaltungsgröße ist $m_3(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}uu_{xx}\,dx$