Serie 8

Besprechung: Mittwoch, 3.12.14

8.1. Betrachten Sie die Gleichung $y'' + \varepsilon(y')^3 + y = 0$ mit $0 < \varepsilon \ll 1$ und $y(0) = a > 0$ und $y'(0) = 0$.

a) Warum bleibt die Lösung beschränkt?

b) Geben Sie die Approximation $y_0(t, T)$ eines Mehrskalenansatzes an, wenn $T = \varepsilon t$ gewählt wird.

8.2. Betrachten Sie die "Duffing-Gleichung" (ein nichtlinearer Oszillator), d.h. die Gleichung $y''+y+\varepsilon y^3 = 0$ mit $0 < \varepsilon \ll 1$ und $y(0) = a > 0$ und $y'(0) = 0$.

a) Geben Sie eine "Energie" an, die erhalten wird. Damit gibt es periodische Lösungen, wobei die Periode von ε und a abhängt. Wie sieht das Phasenportrait für kleine ε in der Nähe von $(0, 0)$ aus? Bemerken Sie, daß Sie, ausgehend von der Energieerhaltung, eine separierbare Differentialgleichung (erster Ordnung) haben. Geben Sie die Periode $T(\varepsilon, a)$ als Integral an:

$$T(\varepsilon, a) = 4 \int_0^a \cdots .$$

Geben Sie eine Entwickung $T(\varepsilon, a) = c_0(a)+c_1(a)\varepsilon+c_2(a)\varepsilon^2+\cdots$ an, indem Sie den Integranden entwickeln. Warum ist das erlaubt?

b) Die Pendelgleichung ist $y'' + \sin y = 0$. Mittels Taylorentwicklung $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots$ und kleinen Auslenkungen a ergibt sich als Frequenz der Schwingung $\omega \approx 1 - \frac{1}{16}a^2$.

8.3. Es handelt sich hier um eine Störungstheorie, um die Frequenz eines *periodischen* Orbits zu bestimmen. Betrachten Sie die Duffinggleichung $y'' + y + \varepsilon y^3 = 0$ mit $y(0) = a$ und $y'(0) = 0$ und $0 < \varepsilon \ll 1$. Machen Sie die Variablensubstition $t = \omega\tau$, wobei ω die (unbekannte) Frequenz ist. Die transformierte Funktion sollte dann 2π-periodisch sein. Machen Sie den Ansatz für die transformierte Funktion $\widetilde{y}(\tau) \sim y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \cdots$ und $\omega = 1 + \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2 + \cdots$ (Warum ist der führende Term 1?). Geben Sie die Gleichungen an, die zu ε^0 und ε^1 gehören. Leiten Sie eine Bedingung für ω_1 her, indem Sie Resonanzen unterdrücken (Warum ist das sinnvoll?)

8.4. Verwenden Sie die Technik aus Aufg. 3, um zu zeigen, daß die Frequenz ω des Grenzzykluses der van der Pol-Gleichung $y'' + \varepsilon(y^2 - 1)y' + y = 0$ gegeben ist durch $\omega = 1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$.

8.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie die Aussage, daß eine Deformation φ genau dann die Form $\varphi(x) = Qx + a$ für eine orthogonale Matrix Q und ein $a \in \mathbb{R}^3$ hat, wenn für den Cauchy-Greenschen Tensor C gilt: $C = (\nabla\varphi)^\top\nabla\varphi \equiv I$. Gehen Sie für die Aussage: "$C = I$ impliziert $\varphi = Qx + a$" so vor, daß Sie die folgenden Teilaufgaben bearbeiten. Sie dürfen der Einfachheit halber annehmen, daß die Funktion φ injektiv ist, genauer: $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ ist ein C^1-Diffeomorphismus[1]

a) Zeigen Sie, daß φ Längen erhält, d.h. $\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_2 = \|x - y\|_2$ für alle $x, y \in \Omega$.

b) Betrachten Sie die Hilfsfunktion $G(x, y) := \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_2^2 - \|x - y\|_2^2$. Zeigen Sie durch Differenzieren nach y_i und x_j, daß

$$-\sum_k \frac{\partial\varphi_k(y)}{\partial y_i}\frac{\partial\varphi_k(x)}{\partial x_j} + \delta_{ij} = 0.$$

Dies impliziert $(\nabla\varphi(y))^\top\nabla\varphi(x) = I$.

c) Schließen Sie, daß $\nabla\varphi$ konstant sein muß. Schließen Sie auf $\varphi(x) = Qx + a$.

[1] sonst argumentiert man lokal und fügt die lokalen Aussagen zusammen