Serie 9

Besprechung: Mittwoch, 10.12.14

9.1. (Zusammenhang von 1. und 2. Piola-Kirchhoff-Tensor) Sei $W : \mathbb{S}(3) \to \mathbb{R}$ eine (glatte) Funktion, die auf dem Vektorraum der 3×3 symmetrischen Matrizen definiert ist. Definieren Sie auf der Menge der Matrizen (mit Determinante > 0) die Funktion $\widehat{W}(F) := W(F^\top F)$. Zeigen Sie:

$$\frac{\partial \widehat{W}(F)}{\partial F} = 2F \frac{\partial W(C)}{\partial C}, \qquad C = F^\top F.$$

Hinweis: erinnern Sie sich, daß für eine skalare Funktion W, die auf der Menge der Matrizen definiert ist, die Ableitung $\frac{\partial W}{\partial C}$ definiert ist über $W(C + \Delta) = W(C) + \frac{\partial W}{\partial C} : \Delta + \cdots$

9.2. (Neo-Hooke'sche Materialien) Die Deformationsenergie ist

$$W(C) = \frac{1}{2}\mu \left[\operatorname{tr}(C - I) + \frac{2}{\beta} \left\{ (\det C)^{-\beta/2} - 1 \right\} \right], \qquad \beta > 0.$$

Zeigen Sie, daß für *kleine* Verzerrungen $E = \frac{1}{2}(C - I)$ das klassische Hooke'sche Gesetz erhalten wird. Was sind die entsprechenden Lamé-Parameter λ und μ? *Hinweis:* Nutzen Sie die Symmetrie von E, um $\det C = 1 + 2 \operatorname{tr} E + 2(\operatorname{tr} E)^2 - 2E : E + \cdots$ zu erhalten.

9.3. In der Elastizitätstheorie ist das Energiefunktional $A \mapsto W(A)$ auf (einer Teilmenge) der Menge der Matrizen definiert. Konvexität (von Funktionalen, Mengen) ist bei Minimierungsaufgaben ein wichtiges Hilfsmittel. Zeigen Sie folgende negative Aussage: Die Menge $M := \{A \in \mathbb{R}^{d \times d} \mid \det A > 0\}$ ist *nicht* konvex.

9.4. (inkompressible Materialien) Wir betrachten die Energieminimierung

$$J(u) := \int_\Omega \mu\varepsilon(u) : \varepsilon(u) + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tr} \varepsilon(u))^2 \, dx - \int_\Omega f \cdot u - \int_{\Gamma_N} g \cdot u, \qquad u \in (H^1_D(\Omega))^3 = \{u \in (H^1(\Omega))^3 \mid u|_{\Gamma_D} = 0\}.$$

Inkompressible Materialien sind dadurch gekennzeichnet, daß $\lambda \to \infty$. Für fixe μ, f, g bezeichne u_λ den Minimierer von J.

a) Zeigen Sie, daß $\|u_\lambda\|_{H^1(\Omega)}$ gleichmäßig in λ beschränkt ist (für $\lambda \to \infty$). Es muß also mindestens eine Teilfolge geben mit einem schwachen Grenzwert in $(H^1_D(\Omega))^3$ (tatsächlich konvergiert sogar die Folge).

b) Zeigen Sie, daß u_λ auch folgendes Sattelpunktproblem löst: Finde $u_\lambda \in (H^1_D(\Omega))^3$ und $p \in L^2(\Omega)$ mit $\int_\Omega p = 0$, so daß

$$\begin{aligned} 2\mu(\varepsilon(u_\lambda), \varepsilon(v))_{L^2(\Omega)} + (\nabla \cdot u_\lambda, p)_{L^2(\Omega)} &= l(v) := (f, v)_{L^2(\Omega)} + (g, v)_{L^2(\Gamma_N)} \qquad \forall v \in (H^1_D(\Omega))^3 \\ (\nabla \cdot u_\lambda, q)_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{\lambda}(p, q)_{L^2(\Omega)} &= 0 \qquad \forall q \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Wie wurde p definiert? Hier ist $(\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \varepsilon(u) : \varepsilon(v)$.

9.5. Bei speziellen Geometrien ("Platten", "Schalen") sind spezielle Gleichungen üblich, die sich durch Vereinfachungen aus den (linearen) Elastizitätsgleichungen ergeben. Sei $\Omega = \omega \times (-t/2, t/2)$, wobei die Mittelfläche $\omega \subset \mathbb{R}^2$ und $t > 0$ die Dicke bezeichnet.

Machen Sie folgende Annahmen ("Annahmen von Reissner und Mindlin")

- Es greifen keine Oberflächekräfte angreifen sondern nur Volumskräfte f, welche von der Form $f(x, y, z) = f(x, y)(0, 0, 1)^\top$ sind.
- Die Spannung σ_{33} erfüllt $\sigma_{33} = 0$ in Ω

- Die Verschiebungen haben die Form

$$u_i(x,y,z) = -z\theta_i(x,y), \qquad i \in \{1,2\}, \qquad u_3(x,y,z) = w(x,y)$$

Zeigen Sie: Indem Sie diesen Ansatz in die Minimierungsaufgabe der linearen Elastizität einsetzen, erhalten Sie eine Minimierungsaufgabe, bei der das Funktional Π minimiert wird, welches von der folgenden Form ist:

$$\begin{aligned}
\Pi(\theta, w) &:= \frac{t^3}{12} a(\theta,\theta) + \frac{\mu t}{2} \int_\omega |\nabla w - \theta|^2 \, dx_1 \, dx_2 - t \int_\omega f w \, dx_1 \, dx_2 \\
a(\theta, \psi) &:= \mu \int_\omega \varepsilon(\theta) : \varepsilon(\psi) \, dx_1 \, dx_2 + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \operatorname{div} \theta \operatorname{div} \psi \, dx_1 \, dx_2
\end{aligned}$$

und $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Wir definieren natürlich die 2×2-Matrix $\varepsilon(\theta)$ durch $(\varepsilon(\theta))_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \theta_j}{\partial x_i})$

Bemerkung: Man kann noch eine weitere Vereinfachung machen, die sog. "Kirchhoff" (oder: "Kirchhoff-Love") Annahme. Bei der sind Linien, die vor Deformation senkrecht auf der Mittelfläche waren, auch nach der Deformation senkrecht auf der (deformierten) Mittelfläche. Damit ist

$$\theta_i(x,y) = \frac{\partial w}{\partial x_i}(x,y), \qquad u_i(x,y) = z\frac{\partial w}{\partial x_i}, \qquad i = 1,2;$$

einsetzen in die Minimierungsaufgabe führt auf eine skalare Gleichung 4. Ordnung.

9.6. Prüfen Sie die folgende Variante der Greenschen Formel:

$$\int_\Omega \tau : \varepsilon(v) \, dx = -\int_\Omega v \cdot \operatorname{div} \tau \, dx + \int_{\partial\Omega} v\tau \cdot n \, ds_x,$$

wobei τ und v hinreichend glatt sind und τ symmetrisch ist.