

Serie 10

Besprechung: Mittwoch, 17.12.14

10.1. (Homogenisierung in 1D) Sei $\Omega = (0, 1)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Sei $A \in C^1(\mathbb{R})$ positiv auf \mathbb{R} und zusätzlich 1-periodisch. Betrachten Sie

$$-(A(x/\varepsilon)u')' = f \quad \text{auf } \Omega, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

- a) Geben Sie die homogenisierte Gleichung an.
- b) Bestimmen Sie die "first order approximation" $u_0(x) + \varepsilon u_1(x)$ für die konkrete Wahl

$$f(x) \equiv 1, \quad A(x) = \frac{1}{2 + \cos(2\pi x)}$$

- c) Geben Sie an, welche Größenordnung $O(\varepsilon^\alpha)$ Sie im Beispiel b) für das Volumen- und Randresiduum erwarten.

10.2. Sei $A \in C^1(\mathbb{R}^d)$ punktweise symmetrisch und positiv definit. Sei A weiters $Y := [0, 1]^d$ -periodisch.

Wir zeigen hier: Die homogenisierte Matrix A^0 ist SPD.

Seien hierzu die Funktionen χ_j aus der VO definiert durch

$$-\nabla \cdot (A \nabla \chi_j) = - \sum_i \partial_{y_i} A_{ij}, \quad \chi_j \text{ ist } Y\text{-periodisch}$$

und e_j der j -te Einheitsvektor. Definieren Sie weiters

$$w_j(y) := y_j - \chi_j(y)$$

- a) Zeigen Sie:

$$A_{ij}^0 = \int_Y (A(y) \nabla w_i) \cdot \nabla w_j \, dy \tag{1}$$

(d.h. A^0 ist symmetrisch). Zeigen Sie hierzu folgende Aussagen:

$$\begin{aligned} \int_Y (A \nabla \chi_j) \cdot \nabla v \, dy &= \int_Y (A e_j) \cdot \nabla v \, dy \quad \forall v \in H_{per}^1(Y) \\ \int_Y (A \nabla w_j) \cdot \nabla \chi_i \, dy &= 0 \\ A_{ij}^0 &= \int_Y (A \nabla w_j) \cdot \nabla y_i \, dy \end{aligned}$$

- b) Verwenden Sie die positive Definitheit von A und die Darstellung (1) um zu zeigen:

$$(A^0 \xi) \cdot \xi \geq c \|\xi\|_2^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$$

für ein $c > 0$.

10.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, welches $Y := [0, 1]^d$ -periodisch ist. Definieren Sie $g_\varepsilon(x) := g(x/\varepsilon)$. Zeigen Sie: Die Folge $(g_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ konvergiert schwach in $L^2(\Omega)$ gegen den Y -Mittelwert $\langle g \rangle$.

10.4. Sei $\Omega = (0, 1)$. Geben Sie zwei Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n \subset L^\infty(\Omega)$ an, die schwach (in $L^2(\Omega)$) gegen Grenzwerte a und $b \in L^2(\Omega)$ konvergieren, aber deren Produkt $(a_n b_n)_n$ nicht schwach gegen ab konvergiert.

- 10.5.** a) Sei $(g_n)_n \subset L^2(\Omega)$ eine gegen $g \in L^2(\Omega)$ schwach konvergente Folge und $(f_n)_n \subset L^2(\Omega)$ eine gegen $f \in L^2(\Omega)$ stark konvergente Folge. Sei $\varphi \in L^\infty(\Omega)$. D.g.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n(x) \varphi(x) f_n(x) dx = \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) f(x) dx$$

- b) Sei $(f_n)_n \subset L^2(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Dann gilt:

$$f_n \rightarrow f \quad \iff f_n \rightharpoonup f \quad \text{und} \quad \|f_n\|_{L^2} \rightarrow \|f\|_{L^2}$$

- 10.6.** Sei wie oben $A \in C^1(\mathbb{R}^d)$ Y -periodisch und punktweise symmetrisch positiv definit und A^0 die homogenisierte Matrix. Schreiben Sie $A^\varepsilon(x) := A(x/\varepsilon)$. Definieren Sie für $f \in L^2(\Omega)$ die Funktionen $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ und $u^0 \in H_0^1(\Omega)$ (hier gleich variationell formuliert) durch

$$\int_{\Omega} (A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} (A^0 \nabla u^0) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3)$$

- a) Zeigen Sie die ‘‘Konvergenz der Energie’’, d.h.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) \cdot \nabla u^\varepsilon dx = \int_{\Omega} (A^0 \nabla u^0) \cdot \nabla u^0 dx$$

(Sie dürfen $u^\varepsilon \xrightarrow{H^1} u^0$ verwenden.)

- b) Zeigen Sie ¹

$$\int_{\Omega} (A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) \cdot \nabla u^\varepsilon \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} (A^0 \nabla u^0) \cdot \nabla u^0 \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Hinweis: Verwenden Sie Testfunktionen $u^\varepsilon \varphi$ und $u^0 \varphi$.

- c) Was passiert, wenn man die feste Funktion f in (2) ersetzt durch eine Funktionenfolge $(f_\varepsilon)_\varepsilon$, welche schwach (in $L^2(\Omega)$) gegen $f \in L^2(\Omega)$ konvergiert?

¹vornehm ausgedrückt: $(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) \nabla u^\varepsilon \rightarrow (A^0 \nabla u^0) \cdot \nabla u^0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$