Serie 11

Besprechung: Mittwoch, 14.1.15

Die klassische Boltzmanngleichung ist (für eine skalare Verteilungsfunktion $f = f(t, x, v)$)

$$\partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) = Q(f, f)(x, v, t), \qquad x \in \Omega, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0$$

mit dem Boltzmann-Kollisionsoperator ($f = f(t, x, v)$ und $g = g(t, x, v)$ sind hinreichend glatte und hinreichend schnell abfallende Funktionen)

$$Q(f, g)(x, v, t) = \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{n \in S^2} |(v - v_*) \cdot n| \, [f' g'_* - f g_*] \, dn \, dv_*.$$

Hier sind f, f', g'_*, g_* Abkürzungen für

$$f = f(t, x, v), \qquad f' = f(t, x, v'), \qquad g'_* = g(t, x, v'_*), \qquad g_* = g(t, x, v_*).$$

Hier sind v' und v'_* definiert durch

$$v' = v - (n \cdot (v - v_*))n, \qquad v'_* = v_* + (n \cdot (v - v_*))n. \tag{1}$$

Die Integration in n ist über die Oberfläche S^2 der Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$ und dn bezeichnet entsprechend das Oberflächenmaß.

11.1. Für (hinreichend glatte und geeignet schnell abfallende) Funktionen f und $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kann man die Integrale

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} Q(f, f)(t, x, v) \varphi(v) \, dv = \int_{(v, v_*) \in \mathbb{R}^6} \int_{n \in S^2} |(v - v_*) \cdot n| \, [f' f'_* - f f_*] \, \varphi(v) \, dv \, dv_*$$

definieren.

a) Zeigen Sie:

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} Q(f, f)(t, x, v) \varphi(v) \, dv = \frac{1}{2} \int_{(v, v_*) \in \mathbb{R}^6} \int_{n \in S^2} |(v - v_*) \cdot n| \, [f' f'_* - f f_*] \, \{\varphi + \varphi_*\} \, dv \, dv_*,$$

wobei φ eine Kurzform für $\varphi(v)$ und φ_* eine Kurzform für $\varphi(v_*)$ ist.

b) Zeigen Sie:

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} Q(f, f)(t, x, v) \varphi(v) \, dv = \frac{1}{4} \int_{(v, v_*) \in \mathbb{R}^6} \int_{n \in S^2} |(v - v_*) \cdot n| \, [f' f'_* - f f_*] \, \{\varphi + \varphi_* - \varphi' - \varphi'_*\} \, dv \, dv_*,$$

wobei zusätzlich φ' eine Kurzform für $\varphi(v')$ und φ'_* eine Kurzform für $\varphi(v'_*)$ ist. Hier sind v' und v'_* wie oben definiert. *Hinweis:* Betrachten Sie die Variablensubstitution (1).

11.2. Aufgabe 1 zeigt, daß φ eine *Invariante* des Kollisionsoperators ist (d.h. $\int_{v \in \mathbb{R}^3} Q(f, f)(v) \varphi(v) \, dv = 0$), falls

$$\varphi + \varphi_* - \varphi' - \varphi'_* = 0 \qquad \forall v, v_* \in \mathbb{R}^3 \quad \forall n \in S^2.$$

Zeigen Sie: Die fünf Funktionen

$$1, \quad v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad |v|^2$$

sind Kollisionsinvarianten[1].

11.3. (H-Theorem) Definieren Sie für (geeignete) Verteilungsfunktionen $f > 0$ das Integral ("Entropie")

$$H(t) := \int_{x \in \Omega} \int_{v \in \mathbb{R}^3} f(x, v, t) \ln f(x, v, t) \, dv \, dx.$$

[1] Tatsächlich sind es bereits *alle* Kollisionsinvarianten.

a) Zeigen Sie, daß $(x-y)\ln(x/y) \geq 0$ für alle x, $y > 0$.

b) Zeigen Sie: falls die Verteilungsfunktion f die Boltzmanngleichung

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f,f)$$

erfüllt, dann ist

$$\partial_t \int_{v\in\mathbb{R}^3} f \ln f \, dv + \nabla_x \cdot \int_{v\in\mathbb{R}^3} v f \ln f \, dv \leq 0.$$

c) Zeigen Sie: Falls f zusätzlich die Spiegelungsrandbedingung erfüllt, d.h.

$$f(t,x,v) = f(t,x,v'), \qquad \text{für } x \in \partial\Omega \text{ und } v' = v - 2(\nu(x)\cdot v)\nu(x),$$

dann gilt für die Entropie $H(t)$

$$\partial_t H(t) \leq 0.$$

Hinweis: partielle Integration und die Variablensubstition $v' = v - 2(\nu(x)\cdot v)\nu(x)$.