Übungsblatt 1

Diskussion des Blattes: Do., 14.10.2010, in Übung

1. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $B : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) B ist (folgen-)stetig, wenn $V \times V$ mit der Norm $\|(u, v)\| := \|u\| + \|v\|$ versehen wird

(ii) Es existiert $M > 0$ so daß $|B(u, v)| \leq M\|u\| \, \|v\|$ für alle u, $v \in V$.

2. (Dichtheitsargumente) Sei X normierter Vektorraum und $\widetilde{X} \subset X$ ein dichter Teilraum. Sei Y Banachraum.

a) Sei $\widetilde{L} : \widetilde{X} \to Y$ eine lineare Abbildung, und es möge $C > 0$ geben, so daß $\|\widetilde{L}x\|_Y \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in \widetilde{X}$ gilt. Zeigen Sie, daß sich dann L in eindeutiger Weise zu einer stetigen linearen Abbildung L auf X fortsetzen läßt, d.h. $Lx = \widetilde{L}x$ für alle $x \in \widetilde{X}$ und $\|Lx\|_Y \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in X$.

b) Sei $\widetilde{B} : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform und es gebe $C > 0$, so daß $|\widetilde{B}(u, v)| \leq C\|u\|_X\|v\|_X$ für alle u,$v \in \widetilde{X}$. Dann läßt sich $\widetilde{B}$ eindeutig zu einer stetigen Bilinearform B auf $X \times X$ fortsetzen, d.h. $B : X \times X \to \mathbb{R}$ erfüllt: $B(u, v) = \widetilde{B}(u, v)$ für alle u,$v \in \widetilde{X}$ und $|B(u, v)| \leq C\|u\|_X\|v\|_X$ für alle u, $v \in X$.

3. Sei $\Omega = (0, 1)$ und seien b, c, $f \in C(\overline{\Omega})$. Sei $g \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie

$$-u'' + b(x)u' + c(x)u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u(0) = 0, \quad u'(1) = g.$$

a) Formulieren Sie eine Variationsformulierung für dieses Problem basierend auf dem Raum[1] $X := \{u \in C^1(\overline{\Omega}) \,|\, u(0) = 0\}$. Können Sie sich noch andere Variationsformulierungen vorstellen?

b) Sei $u \in C^2(\Omega) \cap X$ eine Lösung ihrer Variationsformulierung. Zeigen Sie, daß es dann eine klassische Lösung des obigen Randwertproblems ist.

4. Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung von Satz 2.12 des Skriptes: Sei V Vektorraum, $B : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform mit $B(u, u) > 0$ für alle $0 \neq u \in V$. Sei $l : V \to \mathbb{R}$ eine Linearform. Definiere

$$J : \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \qquad u \mapsto J(u) := \frac{1}{2}B(u, u) - l(u)$$

Sei $\mathcal{U} \subset V$ eine abgeschlossene, konvexe (nichtleere) Menge. Dann gilt: $u \in \mathcal{U}$ ist genau dann ein Minimierer von J, falls

$$B(u, v - u) \geq l(v - u) \qquad \forall v \in \mathcal{U}.$$

Die Übungsblätter sind als Postscript-Dateien über das Internet verfügbar unter:
`www.math.tuwien.ac.at/~melenk/teach/fem_WS1314/`

[1] eigentlich müßte man den Sobolevraum $H^1_{(0}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \,|\, u(0) = 0\}$ verwenden