Übungsblatt 10

Diskussion des Blattes: Do., 19.12.2013

1. (erstes Strang Lemma/numerische Quadratur) In der Praxis wird die Steifigkeitsmatrix und der Lastvektor mittels Quadratur ausgewertet. Ziel ist, diese Fehler zu quantifizieren (oder: eine geeignete Quadraturformel auszuwählen)

a) Sei a eine (stetige) Bilinearform auf dem Hilbertraum X, $l \in X'$. Sei $X_N \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei a_N eine stetige, koerzive Bilinearform auf $X_N \times X_N$:

$$\alpha_N \|v\|_X^2 \le a_N(v,v) \qquad v \in X_N \tag{1}$$

und l_N eine stetige Linearform auf X_N. Seien $u \in X$ und $u_N \in X_N$ Lösungen von

$$a(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in X, \qquad a_N(u_N,v) = l_N(v) \qquad \forall v \in X_N.$$

Zeigen Sie:

$$\|u-u_N\|_X \le (1+\alpha_N^{-1}) \left[\inf_{v \in X_N} \left(\|u-v\|_X + \sup_{0 \ne w \in X_N} \frac{|a(v,w)-a_N(v,w)|}{\|w\|_X} \right) + \sup_{0 \ne w \in X_N} \frac{|l(w)-l_N(w)}{\|w\|_X} \right.$$

b) Betrachten Sie das Problem

$$-\nabla \cdot (a(x)\nabla u) = f \quad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei a, f hinreichend glatte Funktionen sind und $a \ge a_0 > 0$ auf $\overline{\Omega}$. Betrachten Sie eine FEM basierend auf dem Raum $S_0^{1,1}(\mathcal{T})$, wobei $\mathcal{T}$ eine reguläre, affine, formreguläre Triangulierung von Ω ist. Die (numerische) Bilinearform a_N und die Linearform l_N werde mit einer Quadraturformel erzeugt: auf dem Referenzdreieck $\widehat{K}$ werde eine Quadraturformel Q^q verwendet (d.h. $\int_{\widehat{K}} g \approx Q^q(g)$). Diese Formel habe folgende Eigenschaften:

- die Quadraturgewichte sind positiv
- die Formel ist exakt für Polynome vom Grad q.

Zeigen Sie für $q \ge 0$;

- (1) gilt mit einer Konstanten $\alpha_N > 0$ unabhängig von h.
- Das Verfahren konvergiert (für Lösungen $u \in H^2(\Omega)$) immer noch mit Fehler $O(h)$.

Die einfachste 1-Punkt-Quadraturformel ist die "Mittelpunktsregel" (Auswertung im Schwerpunkt des Dreiecks). Wie groß sind die Fehlerbeiträge, die durch die Quadratur entstehen im Vergleich zum Approximationsfehler?

2. Die FEM liefert in "natürlicher" Weise Konvergenzaussagen in in der Energienorm. Für das Modellproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

und den Raum $S_0^{1,1}(\mathcal{T})$ auf regulären, affinen, formregulären Triangulierungen $\mathcal{T}$ zeigen wir Konvergenz in anderen Normen. Nehmen Sie an, daß Ω *konvex* ist (damit gilt das Shift-Theorem!).

a) Zeigen Sie die folgende Konvergenzaussage (falls die Lösung $u \in H^2(\Omega)$):

$$\|u - u_N\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

Hinweis: Verwenden sie wieder den "Aubin-Nitsche Trick"aus Aufg. 7.3. Das geeignete duale Problem ist $a(\cdot, \psi) = (\cdot, u - u_N)_{L^2}$.

b) Sei $\mathcal{T}$ zusätzlich quasiuniform, d.h. $h_K \sim h$ für alle $K \in \mathcal{T}$. Zeigen Sie folgende *inverse* Ungleichung:

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^{-1} \|v\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in S^{1,1}(\mathcal{T}).$$

c) Für das obige Modellproblem gilt (für hinreichend glatte Lösungen u) sogar $\|u - u_N\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2 |\log h|$. Zeigen Sie die schwächere Aussage $\|u - u_N\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)}$, falls $\mathcal{T}$ quasiuniform ist.

3. **a)** Sei e eine (innere) Kante einer (regulären, affinen, formregulären) Triangulierung $\mathcal{T}$ mit "edge patch" $\omega_e = K \cup K' \cup e$. Zeigen Sie folgende inverse Ungleichung:

$$\|[\partial_n v]\|_{L^2(e)} \leq Ch_e^{-1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_e)} \qquad \forall v \in S^{1,1}(\mathcal{T}).$$

b) Betrachten Sie den Fehlerindikator gegeben durch

$$\eta_{\mathcal{T}}^2(K, v) = h_K^2 \|f + \Delta v\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}} h_e \|[\partial_n v]\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_N} h_e \|g - \partial_n v\|_{L^2(e)}^2.$$

Wie in der VO definiert setzen wir für eine Teilmenge $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}$

$$\eta_{\mathcal{T}}^2(\mathcal{G}, v) = \sum_{K \in \mathcal{G}} \eta_{\mathcal{T}}^2(K, v).$$

Zeigen Sie die folgende "Dreiecksungleichung" für beliebige u, $v \in S^{1,1}(\mathcal{T})$:

$$\eta_{\mathcal{T}}(\mathcal{G}, u) \leq \eta_{\mathcal{T}}(\mathcal{G}, v) + C\|u - v\|_{H^1(\Omega)}.$$

($\mathcal{T}$ ist natürlich regulär, affin, formregulär).

4. Seien $(x_n)_{n=0}^\infty$ und $(\varepsilon_n)_{n=0}^\infty$ zwei Folgen nichtnegativer Zahlen. Sei $(\varepsilon_n)_{n=0}^\infty$ eine Nullfolge und sei $q \in (0, 1)$. Weiters gelte

$$x_{n+1} \leq qx_n + \varepsilon_n.$$

Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Die Übungsblätter sind als Postscript-Dateien über das Internet verfügbar unter:
`www.math.tuwien.ac.at/~melenk/teach/fem_WS1314/`