Übungsblatt 11

Diskussion des Blattes: Do., 9.1.2014

1. **a)** Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

$$\inf_{\|u\|_2=1} \sup_{\|v\|_2=1} u^T\mathbf{B}v > 0 \iff \operatorname{Ker}\mathbf{B}^T = \{0\}$$

$$\forall v \neq 0: \sup_{\|u\|_2=1} u^T\mathbf{B}v > 0 \iff \operatorname{Ker}\mathbf{B} = \{0\}$$

b) Sei nun $n = m$. Zeigen Sie:

$$\inf_{\|u\|_2=1} \sup_{\|v\|_2=1} u^T\mathbf{B}v \geq \gamma > 0 \qquad \Longrightarrow \|\mathbf{B}^{-1}\|_2 \leq \gamma^{-1}.$$

2. Seien X, Y reflexive Räume. Sei $B : X\times Y \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearform. Dann sind die folgenden Aussagen (1), (2) äquivalent:

$$\inf_{0\neq x\in X} \sup_{0\neq y\in Y} \frac{B(x,y)}{\|x\|_X\|y\|_Y} \geq \gamma > 0 \qquad \text{zusammen mit} \qquad \forall 0 \neq y \in Y \sup_{0\neq x\in X} \frac{B(x,y)}{\|x\|_X} > 0 \tag{1}$$

$$\inf_{0\neq y\in Y} \sup_{0\neq x\in X} \frac{B(x,y)}{\|x\|_X\|y\|_Y} \geq \gamma > 0 \qquad \text{zusammen mit} \qquad \forall 0 \neq x \in X \sup_{0\neq y\in Y} \frac{B(x,y)}{\|y\|_Y} > 0 \tag{2}$$

3. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, positiv semidefinit. Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (mit $m \leq n$), $l \in \mathbb{R}^n$ und $g \in \operatorname{Im}\mathbf{B}$. Sei $u \in \mathbb{R}$ ein Minimierer von

$$\min_{u\in\mathbb{R}^n:\mathbf{B}u=g} \frac{1}{2}u^\top\mathbf{A}u - l^\top u.$$

Zeigen Sie:

a) Es existiert ein *Langrangemultiplikator* $\lambda \in \mathbb{R}^m$, so daß folgendes LGS erfüllt ist:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^\top \\ \mathbf{B} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ g \end{pmatrix}.$$

b) (Eindeutigkeit von u) Falls $\mathbf{A}$ SPD auf Ker$\mathbf{B}$ ist, dann ist der Minimierer u eindeutig.

c) (Eindeutigkeit von λ) λ ist eindeutig bestimmt, falls $\mathbf{A}$ SPD auf Ker$\mathbf{B}$ ist und Ker$\mathbf{B}^\top = \{0\}$ ist. Zeigen Sie: Ker$\mathbf{B}^\top = \{0\}$, falls $\mathbf{B}$ vollen Rang hat.

4. Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit auf Ker$\mathbf{B}$. Definiere

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^\top \\ \mathbf{B} & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie: die inf-sup Bedingung

$$\inf_{\|v\|=1} \sup_{\|u\|=1} v^\top\mathbf{B}u > 0 \tag{3}$$

ist äquivalent dazu, daß $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ regulär ist.

5. Betrachten Sie folgende (unendlichedimensionale) Variante von Aufg. 3. Seien X, M Hilberträume, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ stetige, symmetrische Bilinearform, $b : X \times M \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearform, $l \in X'$, $g \in M'$. Sei $u \in X$ ein Minimierer von

$$\min_{u \in X(g)} J(u), \qquad J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - l(u), \qquad X(g) := \{u \in X \,|\, b(u,q) = g(q) \qquad \forall q \in M\}$$

Definieren Sie den Operator $\mathbf{B}^\top : M \to X'$ durch

$$\langle \mathbf{B}^\top \lambda, v \rangle_{X' \times X} = B(v, \lambda) \qquad \forall \lambda \in M, \quad v \in X$$

Zeigen Sie: Unter der Annahme, daß $\operatorname{Im} \mathbf{B}^\top$ abgeschlossen ist und daß die obige Minimierungsaufgabe eine Lösung $u \in X(g)$ hat, hat das folgende Sattelpunktproblem eine Lösung: finde $(u, \lambda) \in X \times M$ so daß

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\lambda) &= l(v) \qquad \forall v \in X \\ b(u,\mu) &= g(\mu) \qquad \forall \mu \in M \end{aligned}$$

Bemerkung: Tatsächlich ist die Forderung nach Abgeschlossenheit von $\operatorname{Im} \mathbf{B}^\top$ notwendig, um die Existenz eines "Lagrangemultiplikator" zu erhalten. Dies sieht man z.B. mit $X = L^2(0,1)$, $M = L^2(0,1)$, $a(u,v) = (u,v)_{L^2}$, $b(u,\lambda) = (u, \mathcal{A}\lambda)_{L^2}$, wobei der "Aufleitungsoperator" $(\mathcal{A}\lambda)(x) := \int_0^x \lambda(t)\,dt$. Dann ist $\operatorname{Ker} \mathbf{B} = \{0\}$ und man kann sich einfach überlegen, daß im Fall $g = 0$ und $l(v) := (f,v)_{L^2}$ mit $f \in L^2 \setminus H^1$ der Lagrangemultiplikator λ in der Sattelpunktformulierung nicht konstruiert werden kann.

Die Übungsblätter sind als Postscript-Dateien über das Internet verfügbar unter:
`www.math.tuwien.ac.at/~melenk/teach/fem_WS1314/`