Übungsblatt 12

Diskussion des Blattes: Do., 16.1.2014

1. (Quadratur auf Dreiecken)

a) Der Einfachheit halber wählen Sie als Referenzdreieck T^{ref} das gleichseitige Dreieck

$$T^{ref} := \{(x,y) \,|\, -1 < x < 1, 0 < y < \sqrt{3}(1-|x|)\}.$$

Bestimmen Sie eine Quadraturformel Q^1 für die Quadratur $\int_{T^{ref}} f(x,y)\,dx\,dy$, die den Integranden f in den drei Eckpunkten auswertet, so daß sie exakt für Polynome vom Grad 0 ist. Warum ist die Formel auch exakt für Polynome vom Grad 1?

b) Erzeugen Sie analog zu Teilaufg. a) eine Quadraturformel Q^2, die auf den Mittelpunkten der drei Kanten von T^{ref} basiert. Zeigen Sie, daß auch diese Formel exakt für Polynome vom Grad 1 ist.

c) Kombinieren Sie die Formeln Q^1 und Q^2 so, daß eine Formel entsteht, die Polynome vom Grad 2 exakt integriert. Sie dürfen verwenden, daß

$$\int_{T^{ref}} N(x,y)\,dx\,dy = \sqrt{3}, \qquad N(x,y) = (y-\sqrt{3}(1-x))(y-\sqrt{3}(1+x)).$$

2. (Quadratur auf Dreiecken, II) Für Quadraturformeln hoher Ordnung auf Dreiecken transformiert man typischerweise auf ein Viereck ("Duffytransformation") und verwendet auf S eine Tensorproduktformel. Seien

$$T^{ref} = \{(x,y) \,|\, 0 < x < 1, 0 < y < x\}, \qquad S = (0,1)^2$$

und die Transformation $S \ni (\xi,\eta) \mapsto (x,y) = (\xi, \xi\eta) \in T^{ref}$.

a) Formulieren Sie den obigen Zugang mit einer Tensorproduktgaußformel mit n Quadraturpunkten für jede Koordinatenrichtung[1]. Für welche Polynome (auf T^{ref}) ist diese Quadraturformel exakt?

b) Programmieren Sie die obige Tensorproduktquadratur. Sie können die Routine `gauleg.m` der Homepage verwenden. Verwenden Sie Ihre Quadraturroutine zur Bestimmung der Integrale

$$\int_{T^{ref}} r^\alpha \sin r\,dx\,dy, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Plotten Sie das Konvergenzverhalten Ihrer Quadratur (Fehler gegen Anzahl Quadraturpunkte n^2 mit $n \in \{1,\dots,25\}$, doppelt logarithmisch) für $\alpha \in \{-3/2, -1, -1/2\}$. Exakte Werte sind

$$\begin{aligned}
\int_{T^{ref}} \sin(r) r^{-1}\,dx\,dy &\approx 0.44697015766020388924,\\
\int_{T^{ref}} \sin(r) r^{-1/2}\,dx\,dy &\approx 0.37699223516581230275,\\
\int_{T^{ref}} \sin(r) r^{-3/2}\,dx\,dy &\approx 0.56869721658735701496
\end{aligned}$$

Erklären Sie das Verhalten im Fall $\alpha = -1$.

[1] Ein bißchen effizienter ist eine Tensorproduktformel basierten auf einer Jacobiquadratur (d.h. Gaußquadratur für Integrale mit Gewichtsfunktion) in der ξ-Variablen und einer Gaußquadratur in der η-Variablen — warum?

c) Das Konvergenzverhalten aus Teilaufg. b) für die Fälle $\alpha \neq -1$ kann mittels geeigneten zusammengesetzten Quadraturformeln verbessert werden. Programmieren Sie eine zusammengesetzte Tensorprodukt Gaußformel für $S = (0,1)^2$, die darauf basiert, daß S in Rechtecke $(x_i, x_{i+1}) \times (0,1)$ zerlegt wird mit Knoten $0 = x_0 < x_1 = \sigma^L < x_2 = \sigma^{L-1} < \cdots < x_{L+1} = \sigma^0 = 1$. Auf jedem Rechteck $(x_i, x_{i+1}) \times (0,1)$ wird eine Tensorprodukt Gaußregel mit n Punkten (in jede Richtung) verwendet. Programmieren Sie diese Regel, und wiederholen Sie Teilaufg. b). Wählen Sie $\sigma = 0.15$ und $L = n$.

3. Betrachten Sie das reine Neumannproblem

$$-\Delta u = f \qquad \text{auf } \Omega, \qquad \partial_n u = g \quad \text{auf } \partial\Omega$$

unter der Nebenbedingung $\int_\Omega u = 0$.

a) Die schwache Formulierung wurde in der VO auf dem Raum $\overline{H}^1 = \{u \in H^1(\Omega) \mid \int_\Omega u = 0\}$ formuliert. Geben Sie die zugehörige Sattelpunktformulierung an, die auf dem Raum $H^1(\Omega)$ formuliert ist. Zeigen Sie, daß Ihre Sattelpunktformulierung eindeutig lösbar ist (für $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\partial\Omega)$). Geben Sie den Wert des Lagrangemultiplikators an, falls die Daten f, g die Kompatibilitätsbedingung $\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g = 0$ erfüllen. *Hinweis:* Überlegen Sie sich für die Formulierung der Sattelpunktsaufgabe, daß die Variationsformulierung der VO als Minimierungsaufgabe über dem Raum $\overline{H}^1(\Omega)$ verstanden werden kann.

b) Wählen Sie eine FEM-Diskretisierung Ihrer Sattelpunktformulierung. formulieren Sie ein Konvergenzresultat. Was ist der Wert des (diskreten) Lagrangemultiplikators? Falls Sie für die u-Variable den Raum $S^{1,1}(\mathcal{T})$ nehmen, unterscheidet sich die Lösung des (diskreten) Sattelpunktproblems von der Lösung, die Sie in Aufg. 7.4 erhalten haben?