Übungsblatt 13

Diskussion des Blattes: Do., 23.1.2014

1. Seien X, Y Hilberträume und $a : X \times X \to \mathbb{R}$ symmetrisch und koerziv. Sei $\mathbf{B} : X \to Y$ stetiger linearer Operator und $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ gegeben durch $b(u,v) := \langle \mathbf{B}u, v\rangle_Y$. Betrachten Sie für $t > 0$ und $l \in X'$ die Minimierungsaufgabe:

$$\min_{u\in X} \frac{1}{2} a_t(u,u) - l(u), \qquad a_t(u,u) := a(u,u) + t^{-2}\langle \mathbf{B}u, \mathbf{B}u\rangle_Y. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie: die eindeutige Lösung u des Minimierungsproblems (1) ist Lösung des folgenden “Sattelpunktproblems mit Strafterm”:

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\lambda) &= l(v) \qquad \forall v \in X & \text{(2a)}\\ b(u,\mu) - t^2\langle \lambda, \mu\rangle_Y &= 0 \qquad \forall \mu \in Y. & \text{(2b)} \end{aligned}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie wohl λ definiert wurde.

b) Betrachten Sie die folgende Verallgemeinerung des obigen Problems: Zu $g \in Y'$ finde $(u,\lambda) \in X \times Y$, so daß

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\lambda) &= l(v) \qquad \forall v \in X & \text{(3a)}\\ b(u,\mu) - t^2\langle \lambda, \mu\rangle_Y &= g(\mu) \qquad \forall \mu \in Y. & \text{(3b)} \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Falls für ein $\gamma \in (0,1)$ die Bilinearform b die inf-sup-Bedingung

$$\inf_{0\neq\lambda\in Y} \sup_{0\neq u\in X} \frac{b(u,\lambda)}{\|u\|_X\|\lambda\|_Y} \geq \gamma > 0$$

erfüllt, dann ist dieses System eindeutig lösbar, und es existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von der Koerzivitätskonstante α_0 der Bilinearform a und den Normen $\|a\|$, $\|b\|$ abhängt, so daß für alle $t > 0$ gilt:

$$\|u\|_X + \|\lambda\|_Y \leq \frac{C}{\gamma^2}\left[\|l\|_{X'} + \|g\|_{Y'}\right].$$

Hinweise: 1). Das “typische” Vorgehen beim Zeigen einer inf-sup Bedingung für eine Bilinear form $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \mapsto \mathcal{B}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ ist: zu gegebenem $\mathbf{u}$ konstruiert man $\mathbf{v}$ so daß $\mathbf{B}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \geq C_1\|\mathbf{u}\|^2$ und $\|\mathbf{v}\| \leq C_2\|\mathbf{u}\|$. Dann gilt

$$\inf_{\mathbf{u}} \sup_{\mathbf{v}} \frac{\mathcal{B}(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \geq \frac{C_1}{C_2}.$$

2) Betrachten Sie eine geeignete Bilinearform $\mathcal{B}$ wie in Übung 7.15 des Skriptes. 3) Es ist hilfreich, sich $\mathcal{B}((u,\lambda),(u,-\lambda))$ und $\mathcal{B}((u,\lambda),(v,0))$ genauer anzusehen und die folgenden 2 Fälle: $\|u\|_X \leq \delta\|\lambda\|_Y$, $\|u\|_X \geq \delta\|\lambda\|$ für geeignetes $\delta > 0$.

c) Seien $X_N \subset X$ und $Y_N \subset Y$ abgeschlossene Unterräume. Es erfülle b die diskrete inf-sup-Bedingung

$$\inf_{0\neq\lambda\in Y_N} \sup_{0\neq v\in X_N} \frac{b(v,\lambda)}{\|v\|_X\|\lambda\|_Y} \geq \gamma_N > 0.$$

Zeigen Sie: das diskrete System ist lösbar, und es gilt für eine Konstante $C > 0$, die unabhängig von t und γ_N ist, so daß von γ_N abhängt, so daß

$$\|u - u_N\|_X + \|\lambda - \lambda_N\|_Y \leq C(1 + \gamma_N^{-2}) \inf_{(v,\mu)\in X_N\times Y_N} \|u - v\|_X + \|\lambda - \mu\|_Y.$$

2. ("locking" am Beispiel des Timoshenko-Balkens) Betrachten Sie für $\Omega = (0,1)$ den Raum $X = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ und (für kleine $t > 0$) die Bilinearform

$$a_t((w,\theta),(v,\vartheta)) := \underbrace{\int_\Omega \theta'\vartheta'}_{=:a((w,\theta),(v,\vartheta))} + t^{-2} \underbrace{\int_\Omega (w'-\theta)(v'-\vartheta)}_{=:\langle \mathbf{B}((w,\theta)),\mathbf{B}((v,\vartheta))\rangle_{L^2(\Omega)}}$$

Wir betrachten für gegebenes $l \in X'$ das Minimierungsproblem:

$$\min_{u\in X} \frac{1}{2} a_t(u,u) - l(u) \tag{4}$$

a) Zeigen Sie, daß a_t auf X koerziv ist.

b) Zur Diskretisierung der Minimierungsaufgabe (4) werde eine uniforme Triangulierung $\mathcal{T}_h$ mit Gitterweite h und der Raum $X_N = S_0^{1,1}(\mathcal{T}) \times S_0^{1,1}(\mathcal{T})$ verwendet. Formulieren Sie das lineare Gleichungssystem, welches gelöst werden muß.

c) Formulieren Sie das Problem (4) als gemischtes Problem, indem Sie den Lagrangemultiplikator $\lambda = t^{-2}(w' - \theta)$ einführen.

d) Diskretisieren Sie die in c) erhaltene Formulierung, indem sie die Komponenten w und θ durch Funktionen aus X_N approximieren und den Lagrangemultiplikator durch stückweise Konstante Funktionen, d.h. im Raum $M_N = S^{0,0}(\mathcal{T})$ suchen.

3. Programmieren Sie die beiden Verfahren aus Aufg. 2, d.h. die Energieminimierung basierend auf X_N und die Sattelpunktformulierung basierend auf $X_N \times M_N$. Testen Sie Ihr Programm für das Problem mit exakter Lösung

$$\theta(x) = g(x) - 6x(1-x)\int_0^1 g(\xi)\,d\xi, \qquad w(x) = \int_0^x \theta(\xi)\,d\xi, \qquad g(x) = x^2(1-x).$$

Plotten Sie ($|w - w_N|_{H^1}$ und $|\theta - \theta_N|_{H^1}$) gegen $N = 1/h$ (doppelt logarithmisch) für $t \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$ und $h = 2^{-n}$, $n = 1,\dots,15$). Was beobachten Sie?

Hinweis: Wenn Sie die exakte Lösung (θ, w) vorgeben, ist die rechte Seite l aus (4) gegeben als

$$l((v,\vartheta)) = a_t((w,\theta),(v,\vartheta)), \qquad \forall (v,\vartheta) \in X.$$

Um l zu realisieren, können Sie (elementweise) eine Gaußquadratur geeigneter Ordnung verwenden (verwenden Sie z.B. `gauleg.m` zur Bestimmung der Formel).

Die folgende Aufgabe ist nicht pflichtig, gibt aber eine Erklärung für das beobachtete Konvergenzverhalten der vorangegangenen Aufgabe.

4. *)

Notation wie in in Aufg. 2.

a) Überlegen Sie sich, daß $\operatorname{Ker}\mathbf{B}$ unendlichdimensional ist.

b) Zeigen Sie, daß die symmetrische Bilinearform a_t auf X koerziv ist.

c) Wir diskretisieren das Minimierungsproblem (4) indem wir zur uniformen Triangulierung $\mathcal{T}$ mit Maschenweite h den Raum $X_N = S_0^{1,1}(\mathcal{T}) \times S_0^{1,1}(\mathcal{T})$ betrachten. Wir beobachten, daß $X_N \cap \operatorname{Ker}\mathbf{B} = \{0\}$.
Unser Ziel ist: Falls die exakte Lösung $0 \neq u = (w, \theta)$ in $\operatorname{Ker}\mathbf{B}$ liegt, dann gilt für den FEM-Fehler $u - u_N$, wobei $u_N = (w_N, \theta_N)$ die FEM-Approximation an u ist:

$$\|(\theta - \theta_N)'\|_{L^2(\Omega)} \geq \|\theta'\|_{L^2(\Omega)} \left(1 - C\frac{t}{h}\right),$$

für eine Konstante $C > 0$, die nur von Ω abhängt. Insbesondere folgt, daß man für $t \ll h$ keine Konvergenz erwarten kann. Gehen Sie wie folgt vor:

1. Zeigen Sie: $a_t(u - u_N, u - u_N) = \inf\limits_{(v_N,\vartheta_N)\in X_N} \|\theta' - \vartheta_N'\|^2_{L^2(\Omega)} + t^{-2}\|v_N' - \vartheta_N\|^2_{L^2(\Omega)}$.
2. Zeigen Sie $a_t(u, u) = \|\theta'\|^2_{L^2(\Omega)}$.
3. Zeigen Sie: $\|f'\|_{L^2(K)} \leq Ch^{-1}\|f - \lambda\|_{L^2(K)}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, jedes Element $K \in \mathcal{T}$ und $f \in \mathcal{P}_1$. Schließen Sie: $\|v_N' - \vartheta_N\|_{L^2(\Omega)} \geq Ch\|\vartheta_N'\|_{L^2(\Omega)}$ für alle $(v_N, \vartheta_N) \in X_N$.
4. Zeigen Sie $\|\theta_N'\|_{L^2(\Omega)} \leq C\frac{t}{h}$.

d) Formulieren Sie das Problem (4) als gemischtes Problem, indem Sie den Lagrangemultiplikator $\lambda = t^{-2}(w' - \theta)$ einführen.

e) Diskretisieren Sie die in d) erhaltene Formulierung, indem sie die Komponenten w und θ durch Funktionen aus X_N approximieren und den Lagrangemultiplikator durch stückweise Konstante Funktionen, d.h. im Raum $M_N = S^{0,0}(\mathcal{T})$ suchen. Zeigen Sie: die Bilinearform b ihrer Sattelpunktformulierung erfüllt die inf-sup-Bedingung mit einer Konstanten unabhängig von h.
Hinweis: Um die inf-sup-Bedingung nachzurechnen, müssen Sie zu gegebenem $\lambda \in M_N$ Funktionen $(w, \theta) \in X_N$ konstruieren. Machen Sie den Ansatz $w = \int_0^x (\lambda - \overline{\lambda})$ und $\theta = \overline{\lambda}\psi$ für ein geeignet gewähltes $\psi \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$ und geeignet gewähltes $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}$.

f) Programmieren Sie die beiden Verfahren, d.h. die Energieminimierung basierend auf X_N und die Sattelpunktformulierung basierend auf $X_N \times M_N$. Testen Sie Ihr Programm für das Problem mit exakter Lösung

$$\theta(x) = g(x) - 6x(1-x)\int_0^1 g(\xi)\,d\xi, \qquad w(x) = \int_0^x \theta(\xi)\,d\xi, \qquad g(x) = x^2(1-x).$$

Die Übungsblätter sind als Postscript-Dateien über das Internet verfügbar unter:
`www.math.tuwien.ac.at/~melenk/teach/fem_WS1314/`