Übungsblatt 2

Diskussion des Blattes: Do., 17.10.2013, in Übung

1. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $B : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige, symmetrische und koerzive Bilinearform. Sei $l \in V'$. Sei die Energienorm $\|\cdot\|_E$ durch $\|v\|_E := \sqrt{B(v,v)}$ definiert.

a) Sei $V_N \subset V$ ein abgeschlossener Teilraum, $l \in V'$. Seien $u \in V$ und $u_N \in V_N$ durch

$$B(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in V, \qquad\qquad B(u_N, v) = l(v) \qquad \forall v \in V_N$$

erklärt. Zeigen Sie:

$$\|u - u_N\|_E = \min_{v \in V_N} \|u - v\|_E \quad \text{und} \quad \|u - u_N\|_E^2 = \|u\|_E^2 - \|u_N\|_E^2.$$

b) Sei $V_{N'} \subset V$ ein weiterer abgeschlossener Unterraum mit $V_N \subset V_{N'}$ und $u_{N'}$ analog zu u_N definiert. Zeigen Sie: $\|u - u_{N'}\|_E \leq \|u - u_N\|_E$.

2. **a)** Schreiben Sie ein MATLABprogramm, das für beliebiges Gitter und stückweise lineare Ansatzfunktionen die Steifigkeitsmatrix und den Lastvektor für das Problem

$$-u'' + ku = f \quad \text{auf } \Omega = (-1,1), \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

assembliert. Hier ist f eine Funktion und $k \in \mathbb{R}$. Für die Quadratur des Lastvektors können Sie die Mittelpunktsregel ("1-Punkt Gaußquadratur") verwenden. Nutzen Sie beim Erstellen der Steifigkeitsmatrix aus, daß diese dünn besetzt ("sparse") ist, genauer: eine Tridiagonalmatrix.

b) Geben Sie für $k = 0$ und $f \equiv 1$ die exakte Lösung u an. Bestimmen Sie die "Energie" $\|u\|_E^2 := B(u,u)$.

c) Sei $\mathbf{B}$ die Steifigkeitsmatrix und $\mathbf{l}$ der Lastvektor. Zeigen Sie, daß die "Energie" $\|u_N\|_E^2$ der FE-Lösung u_N sich wie folgt berechnen läßt:

$$B(u_N, u_N) = \mathbf{u}^\top \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{u}^\top \mathbf{l},$$

wobei $\mathbf{u}$ der Lösungsvektor ist.

d) Bestimmen Sie für $k = 0$, $f \equiv 1$ und uniforme Gitter (mit Gitterweite h) mit Ihrem Programm den Energienormfehler der FE-Approximation, d.h. bestimmen Sie

$$\|u - u_N\|_E = \sqrt{B(u - u_N, u - u_N)}.$$

Plotten Sie (doppelt logarithmisch) den Energienormfehler gegen h für verschiedene Werte von h. *Hinweis zum debuggen:* Der Fehler $\|u - u_N\|_E$ sollte $O(h)$ sein.

3. **a)** Sei $\Omega = (0,1)$ und $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$. Betrachten Sie den Raum $X := \{u \in C(\overline{\Omega}) \,|\, u|_{[x_i, x_{i+1}]}) \in C^1([x_i, x_{i+1}]), i = 0, \ldots, N-1\}$. Zeigen Sie: $X \subset H^1(\Omega)$. Was würde passieren, wenn Sie die Bedingung $u \in C(\overline{\Omega})$ fallenlassen?

b) Sei $\Omega_1 = (-1,0) \times (0,1)$, $\Omega_2 = (0,1) \times (0,1)$, $\Omega = (-1,1) \times (0,1)$. Sei $u \in C(\overline{\Omega})$ und gelte $u|_{\overline{\Omega_i}} \in C^1(\overline{\Omega_i})$, $i \in \{1,2\}$. Zeigen Sie: $u \in H^1(\Omega)$. Was passiert, wenn man die Forderung der Stetigkeit über die Kante $\{(0,y) \,|\, y \in (0,1)\}$ fallen läßt?

4. Sei der Sobolevraum $H^1(\Omega)$ wie in der VO über die Existenz von schwachen Ableitungen definiert: $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$. Sei $H^1(\Omega)$ mit dem "natürlichen" Skalarprodukt versehen:

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} := \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=1} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Schließen Sie aus der Vollständigkeit von $L^2(\Omega)$, daß $H^1(\Omega)$ vollständig ist und damit ein Hilbertraum.

5. Sei B die Einheitskugel im $\mathbb{R}^d$. Betrachten Sie auf B die Funktion $u(x) := |x|^\alpha$. Geben Sie hinreichende Bedingungen an, so daß $u \in H^k(B)$.