Übungsblatt 3

Diskussion des Blattes: Do., 24.10.2013 (Aufgaben 1-5) und 31.10.2013 (Aufgaben 6-9)

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

a) Zeigen Sie: $H_0^1(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $H^1(\Omega)$.

b) Zeigen Sie: Für $u \in H^1(\Omega)$ gilt $|u(x)-u(y)| \leq \sqrt{|x-y|}\|u'\|_{L^2(\Omega)}$. *Hinweis:* Zeigen Sie die Aussage zuerst unter der Annahme, daß $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Verwenden Sie dann die Aussage, daß $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $H^1(\Omega)$ liegt.

c) Zeigen Sie mittels b) und dem Satz von Arzelà-Ascoli, daß $H^1(\Omega)$ kompakt in den $L^2(\Omega)$ eingebettet ist.

2. Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ die (euklidische) Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$. Sei $u(x) := \ln(\ln|x|/e)$ (wobei $|x|$ die euklidische Norm von x ist). Zeigen Sie: $u \in H_0^1(\Omega)$ (also: $u \in H^1(\Omega)$ und $\gamma_0 u = 0$) aber $u \notin L^\infty(\Omega)$.

3. Sei $\Omega = (-1,1)$. Zeigen Sie folgende Dichtheitsaussagen:

a) $C_0^\infty(\Omega)$ ist dicht in $L^2(\Omega)$

b) Es gilt, daß $C^\infty(\overline{\Omega})$ ist dicht in $H^1(\Omega)$. Zeigen Sie folgendes, schwächeres Resultat: Für jedes $\Omega' = (-1+\delta, 1-\delta)$ (mit $\delta > 0$) und jedes $\varepsilon > 0$ läßt sich zu jedem $u \in H^1(\Omega)$ ein $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ finden, so daß $\|u - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega')} \leq \varepsilon$.
Hinweis: überlegen Sie sich, daß für den "üblichen" Mollifier ρ_δ auf Ω' gilt: $(u \star \rho_\delta)' = u' \star \rho_\delta$.

4. Sei $\Omega = (-1,1)$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} (1-|x|)^2 & x \in (-1,1) \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases}$$

Sei $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung der rationalen Zahlen in Ω. Zeigen Sie: die Funktion

$$u(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{2^{-i}}{i^2}\varphi((x-q_i)2^i)$$

ist ein Element von $H^1(\Omega)$. Ist u bei $x \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ klassisch differenzierbar?

5. (Fortsetzungsoperatoren für "glatte" Gebiete) Ziel: falls $\partial\Omega$ in C^k ist, dann existiert ein Fortsetzungsoperator $E : H^k(\Omega) \to H^k(\mathbb{R}^d)$.

a) Sei $\Omega = (0,1)$ und $\widehat{\Omega} = (-1,1)$. Sei $u \in C^1([0,1])$. Setzen Sie u zu einer Funktion $Eu \in C^1(-1,1)$ fort. Machen Sie hierzu den Ansatz für $x < 0$: $(Eu)(x) := \alpha_0 u(-x/2) + \alpha_1 u(-x/3)$ und bestimmen Sie α_0, α_1. Zeigen sie, daß sich $E : H^1(\Omega) \to H^1(-1,1)$ fortsetzen läßt. Zeigen Sie, daß sogar $E : H^2(\Omega) \to H^2(-1,1)$ gilt.

b) Seien $1 > q_0 > q_1 > \cdots > q_k > 0$. Konstruieren Sie wie in a) eine C^k-Fortsetzung einer Funktion $u \in C^k([0,1])$ auf $\widehat{\Omega}$ mittels des Ansatzes $(Eu)(x) = \sum_{i=0}^k \alpha_i u(-q_i x)$ für $x < 0$. Für welche Sobolevräume H^s gilt $E : H^s(\Omega) \to H^s(\widehat{\Omega})$ ist stetig?

c) Sei $\Omega = (-1,1)^{d-1} \times (0,1)$ und $\widehat{\Omega} = (-1,1)^{d-1} \times (-1,1)$. Konstruieren Sie einen Fortsetzungsoperator $E : H^k(\Omega) \to H^k(\widehat{\Omega})$.

6. In der VO wurden die Sobolevschen Einbettungssätze vorgestellt. Diese Aufgabe stellt mit dem sog. "Skalierungsargument" eine einfache Methode vor, um zu prüfen, ob ein Einbettungssatz gelten kann.

a) Zeigen Sie, daß $H^1(\mathbb{R}^n)$ nicht (stetig) in den $L^q(\mathbb{R}^n)$ für $q \in [1,2)$ eingebettet werden kann.

b) Zeigen Sie für $n > 2$ und $\infty > q > p^*$, wobei $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, daß $H^1(\mathbb{R}^n)$ nicht (stetig) in den $L^q(\mathbb{R}^n)$ eingebettet werden kann.

Hinweis: Es reicht zu zeigen, daß es keine Konstante $C > 0$ geben kann, so daß

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Hierzu betrachtet man für festes u auch die Funktion $x \mapsto u(x\lambda)$ für geeignetes $\lambda > 0$. Dieses Vorgehen nennt man "Skalierungsargument".

7. Ziel der Aufgabe ist, den Rellichschen Auswahlsatz ("H^1 ist kompakt in L^2 eingebettet) in einem einfachen Setting ohne den Satz von Arzelà-Ascoli zu verwenden.

Sei $\Omega = (0,\pi)$. Dann ist aus der Analysis bekannt, daß jedes $u \in L^2(\Omega)$ sich als Sinusreihe $u = \sum_{n=1}^\infty u_n \sin nx$ schreiben läßt, wobei $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty u_n^2$. Ebenfalls bekannt aus der Analysis ist, daß sich u alternativ in eine Cosinusreihe entwickeln läßt: u läßt sich schreiben als $u = \sum_{n=0}^\infty \tilde{u}_n \cos nx$, wobei $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \pi|u_0|^2 + \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty u_n^2$.

a) Zeigen Sie, daß für jedes $u \in H_0^1(\Omega)$ die Koeffizienten der Sinusreihe von u die folgende Beziehung erfüllen:

$$\|u'\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty n^2 u_n^2$$

Hinweis: Entwickeln Sie $u' \in L^2(\Omega)$ in eine Cosinusreihe und überlegen Sie sich, daß Sie durch Aufintegrieren die Sinusreihe von u erhalten können.

b) Teilaufg. a) zeigt, daß für $u = \sum_{n=1}^\infty u_n \sin nx$, der Ausdruck $\sum_{n=1}^\infty (1+n^2)u_n^2$ eine zur $H^1(\Omega)$-Norm äquivalenten Ausdruck darstellt. Definieren Sie auf dem Raum der Folgen $(v_n)_{n=1}^\infty$ die Normen $\|v\|^2_{\ell^2} := \sum_{n=1}^\infty v_n^2$ und $\|v\|^2_{h^1} := \sum_{n=1}^\infty (1+n^2)v_n^2$ und damit die entsprechenden Räume ℓ^2 und h^1. Zeigen Sie, daß h^1 kompakt in ℓ^2 eingebettet ist.

Hinweis: Betrachten Sie eine Folge von Folgen $(v_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n^3)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots$ mit $\|v^m\|_{h^1} \leq 1$ für alle m. Überlegen Sie sich, daß Sie eine Teilfolge auswählen können, die eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_{\ell^2}$ ist (Daß diese Cauchyfolge dann konvergiert, folgt aus der Vollständigkeit von ℓ^2, welche Sie annehmen dürfen).

8. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ Lipschitzgebiet. Es ist $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (sogar mit kompakten Einbettungen). Diese kompakte Einbettung drückt sich in den folgenden sog. "Interpolationsungleichungen" aus.

a) Zeigen Sie unter Verwendung eines Fortsetzungsoperators und geeigneter partieller Integration auf $\mathbb{R}^d$: Es gibt ein $C_\Omega > 0$ so daß

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H^2(\Omega)$$

b) Zeigen Sie mittels einer geeigneten partiellen Integration und der Dichtheitsaussage, daß $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $H^2(\Omega)$ ist, daß für ein $C_\Omega > 0$

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|_{L^2(\Omega)} |u|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega).$$

9. Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Deny-Lions, daß für $k > 0$ (und beschränkte Lipschitzgebiete) gilt:

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} \leq C_\Omega \left[|u|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right] \qquad \forall u \in H^k(\Omega),$$

d.h. die Seminormen $|u|_{H^1(\Omega)}, \ldots, |u|_{H^{k-1}(\Omega)}$ sind "überflüssig".