Übungsblatt 4

Diskussion des Blattes: Do., 7.11.2013

1. Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$ die Einheitskugel. Zeigen Sie, daß man auf $L^2(\Omega)$ nicht in sinnvoller Weise den Spuroperator definieren kann. Genauer: Es gibt keinen stetigen linearen Operator $\gamma : L^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ so daß $\gamma u = u|_{\partial\Omega}$ für alle $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon. Sei Γ_D eine Kante von Ω. Sei $H^1_0(\Omega, \Gamma_D) := \{u \in H^1(\Omega) \,|\, (\gamma_0 u)|_{\Gamma_D} = 0\}$. Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)} &\leq C|u|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1_0(\Omega, \Gamma_D), \\ \|u\|_{H^1(\Omega)} &\leq C\left[|u|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Gamma_D)}\right] \qquad \forall u \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

3. (Charakterisierung von Sobolevräumen mittels Fouriertransformation)

a) Die Fouriertransformierte einer $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ werde mit $\widehat{u}$ bezeichnet. Zeigen Sie, daß es für $k \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante $C_{k,d} > 0$ gibt, so daß für alle $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$C_{k,d}^{-1}\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^d)} \leq \|(1 + |\xi|)^k \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{k,d}\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^d)}.$$

Bemerkung: Weil $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $H^k(\mathbb{R}^d)$ liegt, folgt daraus eine äquivalente Formulierung der Norm $\|\cdot\|_{H^k(\mathbb{R}^d)}$. Weiters liefert diese Definition eine sehr naheliegende Erweiterung zu Sobolevräumen $H^k(\mathbb{R}^d)$ mit $k > 0$ (“fractional Sobolev spaces”).

b) Zeigen Sie die multiplikative Ungleichung

$$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \qquad \forall u \in H^2(\mathbb{R}^d).$$

4. (Hardy-Ungleichung)

a) Zeigen Sie für glatte Funktionen $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger:

$$\|\mathcal{A}u\|_{L^2(0,\infty)} \leq 2\|u\|_{L^2(0,\infty)}, \qquad (\mathcal{A}u)(x) := \frac{1}{x}\int_{t=0}^{x} u(t)\,dt.$$

Hinweis: schreiben Sie $|(\mathcal{A}u)(x)|^2 = \frac{1}{x^2}B(x)$ und verwenden Sie partielle Integration.

b) Zeigen Sie für $u \in C_0^\infty(0,\infty)$

$$\|\frac{1}{x}u\|^2_{L^2(0,\infty)}\,dx \leq 4\|u'\|^2_{L^2(0,\infty)}$$

5. Sei $I = (0,1)$ und $u \in H^1(I)$. Zeigen Sie: $|u| \in H^1(I)$. *Hinweis:* Approximieren Sie $|u(x)| = \sqrt{u^2(x) + \varepsilon^2}$.

Die Übungsblätter sind als Postscript-Dateien über das Internet verfügbar unter:
`www.math.tuwien.ac.at/~melenk/teach/fem_WS1314/`