Übungsblatt 5

Diskussion des Blattes: Do., 13.11.2013

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon. Sei Γ_N eine Vereinigung von Kanten von Ω und sei Γ_D die Vereinigung der restlichen Kanten von Ω. Wir definieren $H^1_0(\Omega, \Gamma_D)$ wie in Aufgabe 4.2. Wir betrachten:

$$\text{Finde } u \in H^1_0(\Omega,\Gamma_D) \text{ s.d.} \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_N} gv \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega,\Gamma_D). \quad (1)$$

a) Sei $\Gamma_D \neq \emptyset$. Zeigen Sie: Für $c \in L^\infty(\Omega)$ mit $c \geq 0$ auf Ω hat die Variationsformulierung (1) hat eine eindeutige Lösung. Kann die Bedingung $c \geq 0$ abgeschwächt werden? *Hinweis:* Verwenden Sie Aufg. 4.2 in der Form $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P |u|_{H^1(\Omega)}$.

b) Sei $\Gamma_N = \partial\Omega$. Zeigen Sie: Falls $0 < \inf_{x\in\Omega} c(x)$, dann hat die Variationsformulierung (1) eine eindeutige Lösung. Was passiert im Fall $c(x) \equiv 0$?

c) Sei $c \in C(\overline{\Omega})$, $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\overline{\Gamma_N})$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ die Lösung von (1). Zeigen Sie: u erfüllt punktweise die folgende Aufgabe:

$$-\Delta u + c(x)u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad \partial_n u = g \quad \text{auf } \Gamma_N \text{ ohne die Eckpunkte}, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_D.$$

2. (Robin-Randbedingungen/Randbedingungen der 3. Art) Betrachten Sie das Randwertproblem:

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad \partial_n u + \alpha u = h \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\partial\Omega)$, $\alpha > 0$ sei. Geben Sie eine Variationsformulierung für dieses Randwertproblem an. Ist es für jedes $f \in L^2(\Omega)$ und $h \in L^2(\partial\Omega)$ lösbar?

Wie sieht die analoge Randbedingung aus, wenn man die Differentialgleichung

$$-\nabla \cdot (A(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u = f \quad \text{auf } \Omega$$

betrachtet?

3. Sei $\Omega = (0,1)^2$ das Einheitsquadrat unterteilt in $N \times N$ Rechtecke. Jedes Rechteck sei weiter in zwei Dreiecke unterteilt wie in untenstehender Figur für $N = 3$ angedeutet. Betrachten Sie die finite Elementdiskretisierung des Problems

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit stückweise linearen Ansatzfunktionen auf dem Dreiecksgitter. Stellen Sie die Steifigsmatrix auf. Hierzu ist es zweckmäßig, die Knoten mit doppelten Indizes (i,j) für $i,j = 0,\ldots,N$ zu behandeln, wobei der Knoten mit Index (i,j) die Koordinaten $x_{ij} = (ih, jh)$ mit $h = 1/N$ hat. Vergleichen Sie die Matrix mit der finiten Differenzenmatrix für das gleiche Problem. Die Formulierung durch finite Differenzen ist gegeben durch das Gleichungssystem

$$\frac{4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{h^2} = f_{ij} := f(x_{ij}), \qquad i,j = 1,\ldots,N-1$$

sowie den Randbedingungen

$$u_{ij} = 0 \qquad \text{falls } i \text{ oder } j \in \{0, N\}.$$

4. Erstellen Sie ein 2D-FEM Programm in MATLAB zum Lösen von

$$-\Delta u = f \qquad \text{auf } (0,\pi)^2 \qquad\qquad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

indem Sie die Routinen in
`http://www.math.tuwien.ac.at/~melenk/teach/fem_WS1314/blatt5_2D_FEM_empty_shell.m`
vervollständigen. Die rechte f ist bereits in dem Code als Funktion definiert.

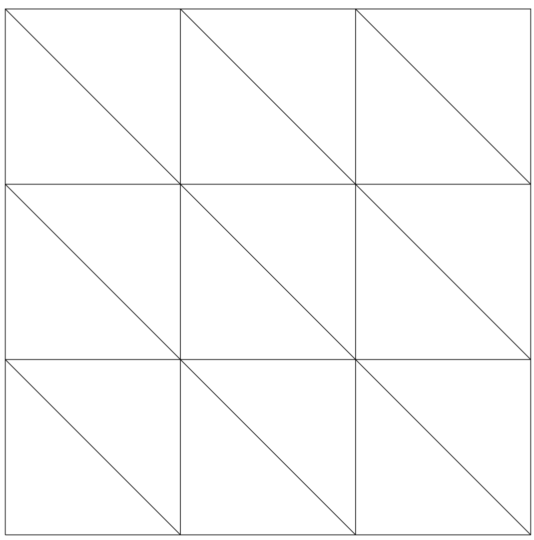

Abbildung 1: Beispielgitter für Aufg. 3 für $N = 3$