Übungsblatt 6

Diskussion des Blattes: Do., 21.11.2013

1. Erstellen Sie ein 1D-FEM Program in MATLAB zum Lösen von

$$-u'' + u = 2\sin x \qquad \text{auf } (0,\pi), \qquad u(0) = 0, \qquad u'(\pi) = -1.$$

Das Programm soll für beliebiges $p \in \mathbb{N}$ und beliebiges Gitter $\mathcal{T}$ (gegeben als Knotenliste) die FEM basierend auf dem Raum $S^{p,1}(\mathcal{T})$ realisieren. Anschließend soll für jedes $p \in \{1,2,3,4\}$ die Konvergenz bei uniformer Verfeinerung des Gitter untersucht werden. (D.h.: Plotten Sie den Energienormfehler gegen die Gitterweite h für die vier Fälle von p.) Vervollständigen Sie hierzu die Routinen in
`http://www.math.tuwien.ac.at/~melenk/teach/fem_WS1314/blatt6_1D_FEM_empty_shell.m`

Bei der "reinen" p-Methode wird Konvergenz dadurch erzielt, daß auf einem *festen* Gitter der Polynomgrad p erhöht wird. Plotten Sie für den Fall, daß das Gitter aus einem einzigen Element besteht den Fehler gegen $p \in \{1,\ldots,15\}$ semilogarithmisch (`semilogy`).

2. Modifizieren Sie Ihr Programm aus Blatt 5, Aufgabe 4 derart, daß es auch inhomogene Dirichletrandbedingungen verarbeiten kann. Als Ausgabe soll es den Integralwert $\int_\Omega u_N$ ausgeben.

Sie können als Vorlage auch das Programm
`www.math.tuwien.ac.at/~melenk/teach/fem_WS1314/blatt6_2D_empty_shell.m` verwenden.

3. ("Beziehung" zwischen $H^{1/2}$ und C)

a) In der VO wurde behauptet, daß (für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$) Funktionen $u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ nicht unbedingt stetig sein müssen. Geben Sie ein $u \in H^{1/2}(\partial\Omega) \setminus C(\partial\Omega)$ an [1]

b) Betrachten Sie auf den Einheitskreis $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ die Funktion (in Polarkoordinaten) $u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} r^{k!} \sin(k!\varphi)$. Zeigen Sie, daß diese Funktion stetig auf $\overline{B_1}(0)$ ist, daß Sie auf (der offenen Menge) $B_1(0)$ die Bedingung $-\Delta u = 0$ (klassisch) erfüllt, aber nicht in $H^1(B_1(0))$ ist.

4. Sei $\mathcal{T}$ ein Gitter auf Ω mit Knoten $x_0,\ldots,x_M$. Sei $S^{p,2}(\mathcal{T}) = \{u \in H^2(\Omega) \,|\, u|_K \circ F_K \in \mathcal{P}_p\}$, wobei F_K die affine (bijektive) Elementabbildung ist. Geben Sie eine Basis von $S^{p,2}(\mathcal{T})$, die Sie für die FEM-Realisierung der Bilinearform

$$B(u,v) := \int_\Omega u''v'' + c(x)uv$$

verwenden würden. Geben Sie die Besetzungsstruktur der Steifigkeitsmatrix an.

[1] gemeint ist natürlich: auch keine Funktion, die durch Ändern auf einer Menge vom Maß Null stetig gemacht werden kann.