Übungsblatt 7

Diskussion des Blattes: Do., 28.11.2013

1. Im Beweis der Approximationsaussage

$$\inf_{v \in S^{1,1}(\mathcal{T}_h)} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)} \tag{1}$$

(bei regulären, formregulären, affinen Triangulierungen mit Schrittweite $h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} = h$) wurde das Lemma von Deny-Lions verwendet, welches auf der kompakten Einbettung $H^2 \subset H^1$ beruht. Zeigen Sie: Falls (1) für alle $h > 0$ gilt, dann ist die Einbettung $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ kompakt.

2. Die Konvergenzstudien für den Energienormfehler (Aufg. 5.4) und den Fehler für $\int_\Omega u - u_N$ (Aufg. 6.2) basieren auf dem tatsächlichen Fehler, d.h. die exakte Energie bzw. der exakte Wert $\int_\Omega u$ ist bekannt. Modifizieren Sie Ihren Code für das Poissonproblem (d.h. homogene Dirichlet Randbedingungen), so daß Sie z.B. mittels Aitkens Δ^2-Methode aus Ihren Approximationen den "exakten" Wert extrapolieren und plotten Sie den so (geschätzten) Fehler.

3. In Aufg. 2 bzw. 6.2 beobachten Sie für den Fall $\Omega = (0,1)^2$, daß $\int_\Omega u - u_N = O(h^2)$. Zeigen Sie diese Beobachtung mithilfe des sog. "Nitsche-Tricks" ("Dualitätsargument"). Betrachten Sie hierzu als Modellproblem den Fall homogener Dirichletdaten, d.h.

$$\text{Finde } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.d.} \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v =: a(u,v) = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

und $f \in L^2(\Omega)$. Zum Beweis betrachten Sie die Hilfsgröße ψ definiert durch

$$a(v, \psi) = (v, 1)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

und verwenden Sie Galerkinorthogonalität. Sie dürfen die Regularitätsaussage $\psi \in H^2(\Omega)$ verwenden.

4. Sei Ω Polygon, $f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\partial\Omega)$, die die Kompatibilitätsbedingung

$$\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} h = 0 \tag{2}$$

erfüllen. Sei $\overline{H}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \,|\, \int_\Omega u = 0\}$ und seien $\{\varphi_i \,|\, i = 1, \dots, N\}$ die Hutfunktionen des $S^{1,1}(\mathcal{T})$. Sei $V_N = S^{1,1}(\mathcal{T}) \cap \overline{H}^1(\Omega)$ und die folgende die Variationsaufgabe gegeben:

$$\text{Finde } u \in \overline{H}^1(\Omega) \text{ s.d.} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} hv \qquad \forall v \in \overline{H}^1(\Omega) \tag{3}$$

a) Die Diskretisierung von (3) mittels V_N ist äquivalent zum Lösen eines Gleichungssystems der folgenden Form:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{P}^\top \end{pmatrix} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

wobei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathbf{P}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^N$. Geben Sie die auftretenden Matrizen und Ker$\mathbf{B}$ an.

b) Zeigen Sie: Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^\top & 0 \end{pmatrix}$$

ist regulär. Zeigen Sie: Die gesuchte Lösung $\mathbf{u}$ von (4) kann durch Lösen von

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

erhalten werden.

Die Übungsblätter sind als Postscript-Dateien über das Internet verfügbar unter:
`www.math.tuwien.ac.at/~melenk/teach/fem_WS1314/`