Übungsblatt 8

Diskussion des Blattes: Do., 5.12.2013

1. Sei $\mathcal{T}$ ein reguläre, *affine* Triangulierung des Polygons $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ in *Parallelogramme*, bei der die Elementabbildungen $F_K : \widehat{K} := (0,1)^2 \to K$ die Bedingungen

$$\|F_K'\|_2 \leq C h_K, \qquad \|(F_K')^{-1}\|_2 \leq C h_K^{-1}$$

erfüllen (für ein $C > 0$, welche nicht von K abhängt). Hier ist h_K der Durchmesser von K. Sei $p \in \mathbb{N}$ fest. Sei $S^{p,1}(\mathcal{T}) := \{u \in H^1(\Omega) \colon u|_K \circ F_K \in \mathcal{Q}_p\}$, wobei der Tensorproduktraum $\mathcal{Q}_p := \operatorname{span}\{p_1(x)p_2(y) \colon p_1, p_2 \in \mathcal{P}_p\}$. Konstruieren Sie einen Operator $I : C(\overline{\Omega}) \to S^{p,1}(\mathcal{T})$ mit der Approximationseigenschaft

$$\|u - Iu\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^{p+1} |u|_{H^{p+1}(\Omega)} \qquad \forall u \in H^{p+1}(\Omega)$$

wobei $h = \max_{K \in \mathcal{T}} h_K$.

2. (Inverse Abschätzungen)

a) Betrachten Sie ein uniformes Gitter auf $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ mit Gitterweite $h \in (0,1)$. Zeigen Sie die folgende *inverse Ungleichung*:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C h^{-1} \|u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in S^{p,1}(\mathcal{T}). \tag{1}$$

Hinweis: Zeigen Sie, daß auf dem Referenzelement $\hat{K}$ für geeignetes $C > 0$ gilt:

$$\|u\|_{L^2(\hat{K})} \leq \|u\|_{H^1(\hat{K})} \leq C \|u\|_{L^2(\hat{K})} \qquad \forall u \in \mathcal{P}_p,$$

b) Sei $\mathcal{T}$ ein reguläres, affines, γ-formreguläres Gitter. Zeigen Sie, daß eine Konstante $C > 0$ gibt, die nur von γ abhängt, so daß die folgende *inverse Abschätzung* gilt:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \underline{h}^{-1} \|u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in S^{1,1}(\mathcal{T}),$$

wobei $\underline{h} = \min_{K \in \mathcal{T}} h_K \leq 1$.

3. Sei $\mathcal{T}$ eine quasi-uniforme Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$ mit Gitterweite h. Sei $\mathbf{A}$ die Steifigkeitsmatrix, die durch Diskretisierung von

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit den Hutfunktionen entsteht. Zeigen Sie:

a) Für alle $u \in S^{1,1}(\mathcal{T})$ gilt: $C_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq h^d \sum_{i=1}^N |\mathbf{u}_i|^2 \leq C_2 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$.

b) Zeigen Sie: Die symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ erfüllt

$$\lambda_{max}(\mathbf{A}) \leq C h^{d-2}, \qquad \lambda_{min}(\mathbf{A}) \geq C h^d.$$

Geben Sie eine Abschätzung der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{A}^{-1}\|_2$ an.

4. Es soll die inverse Ungleichung (1) aus Aufgabe 2 numerisch überprüft werden. Seien hierzu $\mathbf{B}$ und $\mathbf{M}$ die Steifigkeitsmatrix und die Massematrix, die zu den Bilinearformen

$$B(u,v) = \int_\Omega u'v' + uv, \qquad M(u,v) = \int_\Omega uv$$

gehören.

a) Überlegen Sie sich, daß

$$\Lambda = \max_{0 \neq u \in S^{p,1}(\mathcal{T})} \frac{B(u,u)}{M(u,u)}$$

der größte Eigenwert des (verallgemeinerten) Eigenwertproblems

$$\mathbf{Bu} = \lambda \mathbf{Mu}$$

ist.

b) Schreiben Sie Ihren 1D-FEM Code von Blatt 6 so um, daß er (für verschiedene Werte von p und Schrittweiten h) die Konstante Λ bestimmt. *Hinweis:* In MATLAB können Sie den Befehl `eigs(B,M,1)` verwenden. Plotten Sie für $p \in \{1,2,3\}$ den Wert von Λ gegen $h = 2^{-j}$, $j = 1, \ldots, 6$.

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon mit $0 \in \partial\Omega$. Sei die Funktion u in Polarkoordinaten gegeben durch $u(r,\varphi) = r^\alpha \Phi(\varphi)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und eine glatte Funktion Φ. Sei $\mathcal{T}$ eine reguläre, affine, γ-formreguläre Triangulierung von Ω mit folgender Quasiuniformitätseigenschaft:

$$h_K \leq \max_{K \in \mathcal{T}} h_K =: h \leq c_1 h_K \qquad \forall K \in \mathcal{T}.$$

a) Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von γ, c_1 und α, Φ, Ω abhängt, so daß der stückweise lineare Interpolant $Iu \in S^{1,1}(\mathcal{T})$ die Abschätzung

$$\|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^\alpha$$

erfüllt. *Hinweise:* Betrachten Sie die Elemente K mit $0 \in \overline{K}$ und die Elemente mit $0 \notin \overline{K}$ getrennt. Für die Elemente K mit $0 \notin \overline{K}$ gilt zusätzlich $\operatorname{dist}(K,0) \geq ch$ für ein geeignetes $c > 0$ (welches von c_1 und γ abhängt). Verwenden Sie, daß $|\partial^\beta u| \leq r^{\alpha-2}$ für $\beta \in \mathbb{N}_0^2$ mit $|\beta| = 2$.

b) Zeigen Sie

$$\inf_{v \in S^{1,1}(\mathcal{T})} \|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)} \geq ch^\alpha.$$

Hinweis: Betrachten Sie ein Element K mit $0 \in \overline{K}$. Überlegen Sie sich

$$\inf_{v \in S^{1,1}(\mathcal{T})} \|\nabla u - \nabla v\|_{L^2(K)} \geq \inf_{a \in \mathbb{R}} \|\partial_x u - a\|_{L^2(K)} \geq ch_K^\alpha.$$