Übungsblatt 9

Diskussion des Blattes: Do., 12.12.2013

1. Sei $\mathcal{T}$ ein "formreguläres" Gitter auf $\Omega = (0,1)$, d.h. für beliebige benachbarte Elemente K, K' (d.h. $\overline{K} \cap \overline{K'} \neq \emptyset$) gilt

$$C_1 h_K \le h_{K'} \le C_2 h_K.$$

Sei $I : L^2(\Omega) \to S^{1,1}(\mathcal{T})$ eine lineare Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(i) I is ein Projektor: $Iu = u$ für alle $u \in S^{1,1}(\mathcal{T})$

(ii) I ist "lokal und stabil":

$$\|Iu\|_{L^2(K)} \le C_3 \|u\|_{L^2(\omega_K)} \qquad \forall K \in \mathcal{T} \qquad \forall u \in L^2(\Omega);$$

hier ist $\omega_K = \cup\{K' \,|\, \overline{K'} \cap \overline{K} \neq \emptyset\}$.

Zeigen Sie: Es gilt für $u \in H^1(\Omega)$:

$$\|u - Iu\|_{L^2(K)} \le C_4 h_K \|u\|_{H^1(\omega_K)} \qquad \forall K \in \mathcal{T},$$

wobei C_4 nur von den Konstanten C_1, C_2, C_3 abhängt.

Hinweis: Betrachten Sie für festes K und beliebiges $\pi \in \mathbb{R}$ den Fehler $(u - \pi - I(u-\pi))|_K$; verwenden Sie eine inverse Ungleichung (auf K) von der Art wie in Aufg. 8.2.

Bemerkung: Eine Projektion I mit obigen Eigenschaften kann tatsächlich konstruiert werden. Seien N_1, N_2 die Hutfunktionen auf dem Referenzelement $\widehat{K}$. Seien $\widehat{\psi}_i$, $\widehat{\psi}_2$ zwei Funktionen ("duale Basis") mit $\int_{\widehat{K}} N_i \widehat{\psi}_j = \delta_{ij}$. Definiere die Knotenwerte $(Iu)(x_i)$ wie folgt: wähle (bel.) ein Element K, so daß x_i Knoten von K ist. Sei z.B. $K = (x_{i-1}, x_i)$. Definiere dann $\psi_K := \psi_2 \circ F_K^{-1}$ und setze $(Iu)(x_i) := h_K^{-1} \int_K \psi_K u$. Die entscheidende Beobachtung ist: für $u \in S^{1,1}$ folgt $(Iu)(x_i) = u(x_i)$.

2. Sei $\Omega = (0,1)$ ein Intervall. Betrachten Sie die das Randwertproblem

$$-\left(a(x)u'\right)' + c(x)u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

wobei die Koeffizienten a, c glatt seien und die Elliptizitätsbedingung

$$a(x) \ge \underline{a} > 0, \qquad c(x) \ge 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

gelte. Sei $\mathcal{T}$ ein Gitter auf Ω, und bezeichne $u_N \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$ die FE-Approximation. Definieren Sie für jedes $K \in \mathcal{T}$

$$\eta_K^2 := h_K^2 \|f - (-\left(a u_N'\right)' + c u_N)\|^2_{L^2(K)}.$$

Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C > 0$, die unabhängig vom Gitter $\mathcal{T}$ und von u ist, so daß für den FE-Fehler $\|u - u_N\|_{H^1(\Omega)}$ gilt:

$$\|u - u_N\|^2_{H^1(\Omega)} \le C \sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_k^2.$$

Hinweis: Gehen Sie vor wie in der Vorlesung. Verwenden Sie jedoch den stückweise linearen Interpolanten anstelle des Clémentinterpolanten.

3. Betrachten Sie wiederum das Randwertproblem aus Aufgabe 2. Definieren Sie für jedes Element $K \in \mathcal{T}$ die Ausdrücke

$$B_K(u,v) := \int_K au'v' + cuv, \qquad r_K := f - \left(-\left(au_N'\right)' + cu_N\right)$$

wobei $u_N \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$ die FEM-Approximation ist. Definieren Sie die Energienorm $\|\cdot\|_E$ und die Elementenergienorm $\|\cdot\|_{E,K}$ durch $\|u\|_E^2 = B(u,u)$ und $\|u\|_{E,K}^2 = B_K(u,u)$.

a) (*Dirichletschätzer*) Für jedes Element K sei $\Phi_K^D \in H_0^1(K)$ die Lösung von

$$-\left(a(\Phi_K^D)'\right)' + c\Phi_K^D = r_K \qquad \text{auf } K, \qquad \Phi_K^D = 0 \quad \text{auf } \partial K.$$

Dann gilt:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \|\Phi_K^D\|_{E,K}^2 \leq \|u - u_N\|_E^2.$$

b) (*Neumannschätzer*) Seien die Elemente K_i der Triangulierung von der Form $K_i = (x_i, x_{i+1})$, $i = 0, \ldots, N-1$. Sei für jeden Knoten x_i ein Wert $J_i \in \mathbb{R}$ (beliebig) gewählt. Definiere den Raum $V_i \subset H^1(K_i)$ durch: $V_i = H^1(K_i)$ für $i = 1, \ldots, N-1$ und $V_0 = \{v \in H^1(K_0)\colon v(0) = 0\}$ und $V_N = \{v \in H^1(K_N)\colon v(1) = 0\}$. Definiere R_{K_i} durch

$$R_{K_i}(v) := \int_{K_i} fv - B_{K_i}(u_N, v)$$

Für jedes Element K_i sei $\Phi_{K_i}^N \in V_i$ definiert durch

$$B_K(\Phi_{K_i}^N, v) = R_{K_i}(v) + J_{i+1}v(x_{i+1}) - J_i v(x_i) \qquad \forall v \in V_i$$

Zeigen Sie: Unter der Voraussetzung, daß Funktionen $\Phi_{K_i}^N$ existieren (für den Fall $c \equiv 0$ ist dies eine implizite Annahme an die Werte J_i) gilt

$$\|u - u_N\|_E^2 \leq \sum_K \|\Phi_K^N\|_{E,K}^2.$$

4. Zeigen Sie: die Poincarékonstante C_P in der 1. Poincaréungleichung, d.h.

$$C_P = \sup_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}}{|u|_{H^1(\Omega)}}$$

ist der Kehrwert der Wurzel des kleinsten Eigenwert des Eigenwertproblems: Finde $(u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$, so daß

$$-\Delta u = \lambda u \qquad \text{auf } \Omega, \qquad u = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega.$$

Die Übungsblätter sind als Postscript-Dateien über das Internet verfügbar unter:
`www.math.tuwien.ac.at/~melenk/teach/fem_WS1314/`