Zweite Übung zu Komplexe Analysis (SS 2013)

1. Sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet und Y ein Banachraum über $\mathbb{C}$. Man zeige, dass es zu jedem harmonischen $h : D \to Y$ eine holomorphes $f : D \to Y$ und ein anti-holomorphes $g : D \to Y$ ($\frac{\partial g}{\partial z} \equiv 0$) gibt, sodass $h = f + g$. Man zeige auch, dass f und g bis auf additive Konstante eindeutig sind.

   Hinweis: Für die Eindeutigkeit wende man $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ auf $h = f+g$ an. Für die Existenz von f und g betrachte man eine holomorphe Stammfunktion von $\frac{\partial h}{\partial z}$ (also ein holomorphes f mit $f' = \frac{\partial h}{\partial z}$) und eine anti-holomorphe Stammfunktion von $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}$ (also ein anti-holomorphes g mit $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}$).

2. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Man zeige, dass aus $\operatorname{Re} f \equiv \operatorname{Re} g$ bzw. $\operatorname{Im} f \equiv \operatorname{Im} g$ auf D folgt, dass sich f und g nur um eine imaginäre (reelle) Konstante unterscheiden.

3. Zeigen Sie, dass für ein holomorphes $f : D \to \mathbb{C}$ die Funktionen f, $\{\bar{z} : z \in D\} = \bar{D} \ni z \mapsto f(\bar{z})$, $\bar{D} \ni z \mapsto \overline{f(z)}$, $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ harmonisch sind.

   Zeigen Sie umgekehrt, dass es für einfach zusammenhängendes D und für ein harmonisches $h : D \to \mathbb{R}$ ein bis auf eine imaginäre Konstante eindeutiges, holomorphes $f : D \to \mathbb{C}$ gibt, sodass $\operatorname{Re} f \equiv h$.

   Hinweis: Mit f und g wie im ersten Beispiel vergleiche man die Imaginärteile von f und $z \mapsto \overline{g(z)}$.

4. Man bestimme alle analytischen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft:

   (a) Längs der Geraden $\operatorname{Im} z = \text{const}$ ist $\operatorname{Re} f(z)$ konstant.

   (b) Längs der Kreise $x^2 + y^2 = cx$ ist $\operatorname{Re} f(z)$ konstant.

   Hinweis: Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Im zweiten Fall betrachte $f(\frac{1}{z})$.

5. Man zeige, dass für jedes holomorphe $f : D \to \mathbb{C}$, welches auf D keine Nullstellen hat, die Funktion $z \mapsto \ln(|f(z)|)$ harmonisch ist.

   Weiters bestimme man alle holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ ($D \subseteq \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhägend und f Nullstellenfrei), für die $|f(z)|$ konstant auf jeder Gerade $\operatorname{Im} z = \mathit{const}$ ist.

6. Sei γ der positiv orientierte Einheitskreis. Man berechne die Integrale $\oint_\gamma \frac{\exp 2\zeta}{(3\zeta+1-i)^3}\, d\zeta$ und $\oint_\gamma \frac{\sin(\pi\zeta^2)}{2\zeta-i}\, d\zeta$.

7. Die *Joukowski-Abbildung* ist definiert als $f(z) = z + \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Man zeige:

   (a) $f(z)$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ analytisch.

   (b) Sei $H \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Teilmenge die die Eigenschaft hat für kein $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gleichzeitig die beiden Punkte w und w^{-1} zu enthalten. Dann ist $f|_H$ injektiv.

(c) Bestimme die Bilder der Kurven $|z| = \text{const}$ bzw. $\arg z = \text{const}$ unter $f(z)$ (Zeichnung!).

(d) Auf welche Menge wird $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ bzw. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ unter f abgebildet?

8. Sei $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ die Folge der *Fibonacci-Zahlen*. Diese ist rekursiv definiert durch $c_0 = c_1 = 1$ und $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$. Zeige, dass, für hinreichend kleine Werte von $|z|$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{1}{1 - z - z^2} \,.$$

9. Bestimmen Sie nacheinander die Potenzreihenentwicklung von $f(z) = \frac{1}{1-z}$ und $g(z) = \log(\frac{1}{1-z})$ (der Zweig von log mit $\log(1) = 0$) um Null. Weiters gebe man die Potenzreihenentwicklung von $z \mapsto \int_{\overrightarrow{0z}} \frac{g(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta,\ z \in \mathbb{D}$ an.

10. Betrachtet man das Verhalten einer Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ am Rand ihres Konvergenzkreises, so könnte es sein, dass sich die Grenzfunktion holomorph auf eine größere Menge Fortsetzen lässt. Dabei kann alles mögliche passieren.

    Man zeige:

    (a) Die Reihe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist auf der gesamten Einheitskreislinie divergent. Bestimme die Funktion $f \in H(\mathbb{D})$ und zeige, dass es ein Gebiet G mit $G \supseteq \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ gibt, sodass f eine Fortsetzung $g \in H(G)$ hat.

    (b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ ist auf der gesamten Einheitskreislinie konvergent. Bestimme die Funktion $f \in H(\mathbb{D})$ und zeige, dass es kein Gebiet G mit $G \supseteq \mathbb{D} \cup \{1\}$ gibt, sodass f eine Fortsetzung $g \in H(G)$ hat.

    (c) Die Lückenreihe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ hat Konvergenzradius 1, also ist $f \in H(\mathbb{D})$. Es gibt kein Gebiet $G \supsetneq \mathbb{D}$, sodass f eine Fortsetzung $g \in H(G)$ hat.

    Hinweis: Zeige, dass $\lim_{r \nearrow 1} f(r\xi) = +\infty$, für alle $\xi \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, wobei E_n wieder die Menge aller n-ten Einheitswurzeln bezeichnet.