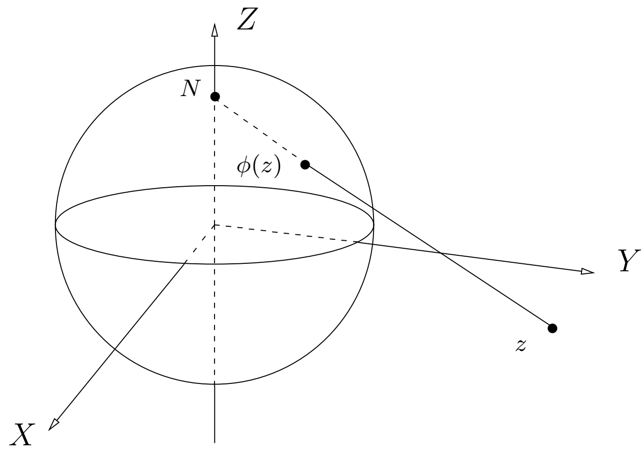
Dritte Übung zu Komplexe Analysis (SS 2013)

Zunächst sei an die cordale Metrik auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ erinnert: Dazu betrachte die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{S}^2 := \big\{(X,Y,Z)^T \in \mathbb{R}^3 : X^2+Y^2+Z^2 = 1\big\}\,,$$

und definiere eine Abbildung $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2$ wie folgt:



D.h. man betrachte die komplexe Zahl z als Punkt in der (X,Y)-Ebene, und schneide die Gerade durch die Punkte $N = (0,0,1)$ und z mit $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Dann erhält man genau einen Punkt und dieser sei $\phi(z)$. In Formeln schreibt sich ϕ als ($x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$)

$$X = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad Y = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad Z = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\,.$$

Die Abbildung ϕ ist eine Bijektion von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Ihre Inverse $\sigma = \phi^{-1} : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ heißt *stereographische Projektion*.

Sei $d_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0,\infty)$ die euklidische Metrik am $\mathbb{R}^3$, d.h.

$$d_{\mathbb{R}^3}\big((X_1,Y_1,Z_1)^T,(X_2,Y_2,Z_2)^T\big) = \|(X_1,Y_1,Z_1)^T - (X_2,Y_2,Z_2)^T\|_2 =$$

$$\sqrt{(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2+(Z_2-Z_1)^2}$$

Dann ist $\langle \mathbb{S}^2, d_{\mathbb{R}^3}\rangle$ ein kompakter metrischer Raum.

Die Abbildung ϕ ist ein Homöomorphismus von $\langle \mathbb{C}, d\rangle$ auf $\langle \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, d_{\mathbb{R}^3}\rangle$. Achtung: ϕ ist sogar gleichmäßig stetig, nicht (!) jedoch σ. Definiert man

$$\chi(z,w) := d_{\mathbb{R}^3}\big(\phi(z),\phi(w)\big), \quad z,w \in \mathbb{C}\,,$$

so erhält man also eine Metrik auf $\mathbb{C}$, die die gleiche Topologie erzeugt wie d (euklidische Metrik auf $\mathbb{C}$, dh. $d(z,w) = |z-w|$), aber nicht zu d äquivalent ist. Man bezeichnet χ als *chordale Metrik* auf $\mathbb{C}$. Explizit ist χ gegeben als

$$\chi(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}\,.$$

Wir werden oft $\mathbb{C}$ vermöge ϕ als Teilmenge von $\mathbb{S}^2$ betrachten. Um bequemlichkeitshalber die Einbettung ϕ notationell zu unterdrücken, definieren wir

$$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}\,,$$

wobei „∞" ein formales Element ist, das nicht zu $\mathbb{C}$ gehört. Setzt man nun χ fort auf $\mathbb{C}_\infty$ durch

$$\chi(z,\infty) := d_{\mathbb{R}^3}(\phi(z), N) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}},\ \chi(\infty,\infty) := 0\,,$$

so ist die Abbildung $\lambda : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{S}^2$

$$\lambda(z) := \begin{cases} \phi(z)\,, & z \in \mathbb{C} \\ N \quad , & z = \infty \end{cases}$$

eine Isometrie von $\langle \mathbb{C}_\infty, \chi \rangle$ auf $\langle \mathbb{S}^2, d_{\mathbb{R}^3} \rangle$. Insbesondere ist die von χ auf $\mathbb{C}_\infty$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}(\chi)$ eine kompakte Topologie auf $\mathbb{C}_\infty$, und als metrische Topologie ist sie auch Hausdorffsch. Somit ist $(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{T}(\chi))$ auch die Einpunkt- bzw. Alexandroffkompaktifizierung des lokalkompakten Raumes $(\mathbb{C}, \mathcal{T}(d))$.

Schließlich erkennt man aus den expilziten Formeln für χ für eine komplexe Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $z \in \mathbb{C}$ gilt, dass $z_n \to z$ bzgl. d genau dann, wenn $z_n \to z$ bzgl. χ, und dass $|z_n| \to +\infty$ genau dann, wenn $z_n \to \infty$ bzgl. χ.

1. Sei $\phi : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Abildung (vgl. den Absatz über die chordale Metrik)
$$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+x^2+y^2} \\ \\ \frac{2y}{1+x^2+y^2} \\ \\ \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \end{pmatrix} .$$
Zeigen Sie, dass auch die Ableitung $d\phi\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ ein skalares Vielfaches einer isometrischen Matrix ist. Bestimmen Sie dieses (positive) Vielfache.

   Dabei ist $M \in \mathbb{R}^{p\times q}$ isometrisch, wenn $(x, y) = (Mx, My)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^q$. Notwendig und hinreichend dafür ist, dass die Spalten ein Orthonormalsystem im $\mathbb{R}^p$ bilden. Warum ?

2. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a, b] \to D$ ein stetiger und stetig differenzierbarer Weg. Man zeige, dass die Weglänge von $\phi\circ f\circ\gamma$ übereinstimmt mit
$$\int_a^b \frac{2|f'(\gamma(t))|}{1 + |f(\gamma(t))|^2} \cdot |\gamma'(t)|\ dt .$$

3. Sei $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $M = (m_{jk})_{j,k=1}^2$ mit $\det M \neq 0$, dh. $M \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Die Abbildung $f_M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$
$$f_M(z) := \begin{cases} \frac{m_{11}}{m_{21}}, & z = \infty \\ \\ \frac{m_{11}z+m_{12}}{m_{21}z+m_{22}}, & z \in \mathbb{C},\ m_{21}z + m_{22} \neq 0 \\ \\ \infty, , & z \in \mathbb{C},\ m_{21}z + m_{22} = 0 \end{cases}$$
heißt *Möbiustransformation mit Koeffizienten M*.

   Zeigen Sie, dass $f_M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ stetig bzgl. der chordalen Metrik ist!

   Zeigen Sie weiters, dass $f_{MN} = f_M \circ f_N$ für $M, N \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Bestimmen Sie alle $M \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ mit $f_M = \mathrm{id}_{\mathbb{C}_\infty}$, und zeigen Sie, dass f_M bijektiv ist. Bestimmen Sie die Inverse Funktion zu f_M. Was ist der Kern des Gruppenhomomorphismus $M \mapsto f_M$ von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ in die Menge aller Homöomorphismen auf $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$.

4. Zeigen Sie, dass sich Translationen $f_\beta(z) := z + \beta$ mit $\beta \in \mathbb{C}$, Drehstreckungen $f_\alpha(z) := \alpha z$ mit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und die Inversionen $I(z) := \frac{1}{z}$ jeweils als Möbiustransformation schreiben lässt.

   Zeigen Sie weiters, dass sich jede Möbiustransformation f_M schreiben läßt als Hintereinanderausführung von Translationen $f_\beta(z) := z + \beta$, Drehstreckungen $f_\alpha(z) := \alpha z$ und Inversionen $I(z) := \frac{1}{z}$, wobei zu gegebenen M nicht immer alle drei dieser elementaren Transformationen auftauchen müssen.

5. Zeige, dass das Bild eines allgemeinen Kreises (also ein Kreis oder eine Gerade samt dem Punkt ∞) in der Ebene unter einer Möbiustransformation auf einen allgemeinen Kreis abgebildet wird!

6. Seien (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) jeweils drei verschiedene Punkte von $\mathbb{C}_\infty$. Zeige, dass es $M \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ gibt mit $f_M(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$.
Hinweis: Betrachte zuerst den Fall dass $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ und $w_3 = \infty$.

7. Zeigen Sie, dass für eine harmonische Funktion $u : G \to \mathbb{R}$ mit $G \supseteq K_1(0)$ offen für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt, dass

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P(z, \zeta) u(\zeta) \, d\mu(\zeta) \ ,$$

wobei μ das Oberflächenmaß von $\mathbb{T}$ ist und $P(z, \zeta) = \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}$. Gilt diese Formel auch für harmonische $u : G \to \mathbb{C}$?

Hinweis: Beispiel drei der zweiten Übung. Cauchyschen Integralformel für z bzgl. $\overrightarrow{U_1(0)}$ minus "Cauchyschen Integralformel" für $\frac{1}{\bar{z}}$ bzgl. $\overrightarrow{U_1(0)}$ und dann den Realteil davon betrachten.

8. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Sei $f : D \backslash \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ holomorph und auf D stetig fortsetzbar. Zeigen Sie, dass diese stetige Fortsetzung sogar auf D holomorph ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für $w \in D \cap \mathbb{R}$ und $r > 0$ so, dass $K_r^{\|\cdot\|_\infty}(w) \subseteq D$ auch $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta, \ z \in U_r^{\|\cdot\|_\infty}(w) \setminus \mathbb{R}$, wobei γ der mathematisch positiv durchlaufene Polygonzug durch die Ecken des Quadrates $K_r^{\|\cdot\|_\infty}(w)$ ist. Dafür betrachte man die Summe der zwei Wegintegrale mit dem selben Integranden über die Wege γ_ϵ^+ und γ_ϵ^- und lasse $\epsilon > 0$ gegen Null gehen Hier ist γ_ϵ^+ der geschlossene Polygonzug durch $w + r + i\epsilon, w + r + ir, w - r + ir, w - r + i\epsilon$ und γ_ϵ^- der geschlossene Polygonzug durch $w + r - i\epsilon, w - r - i\epsilon, w - r - ir, w + r + ir$.

9. Schwarzsches Spiegelungsprinzip: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und symmetrisch bzgl. $\mathbb{R}$. Weiters sei $f : D \cap \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}^+$ ist die obere Halbebene) holomorph und derart, dass f eine stetige Fortsetzung auf $D \setminus \mathbb{C}^-$ hat, wobei diese Fortsetzung bei rellen Zahlen auch reelle Werte annimmt. Zeigen Sie, dass dann f eine holomorphe Fortsetzung (wieder f genannt) auf ganz D gestattet, wobei $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}, \ z \in D$.

10. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}, \ j = 1, \ldots, m$, geschlossene, stetige und stetig differenzierbare Wege, sodass die Abbildungen $\gamma_j|_{(a_j, b_j)}$ Einbettungen in den orientierbaren Rand $\partial^o D$ sind und sodass

$$\partial^o D \setminus \dot{\bigcup}_{j=1,\ldots,m} \gamma_j(a_j, b_j) \ \text{ und } \ \partial D \setminus \partial^o D$$

endliche Mengen sind – man denke an einen Kreis, einen Kreis mit Loch, ein Dreieck oder ein Rechteck.

Zeigen Sie, dass für $t \in (a_j, b_j), \ j = 1, \ldots, m$, die komplexe Zahl $-i\gamma_j'(t)$ interpretiert als Zweivektor normal auf den Tangentialraum $T_{\gamma_j(t)}$ für $\partial^o D$ steht.

Zeigen Sie weiters, dass unter der Annahme, dass $-i\gamma_j'(t)$ interpretiert als Zweivektor immer ins Äußere von D zeigt – also ein positives Vielfache der äußeren Normalen $v(y)$ mit $y = \gamma_j(t)$ ist, für ein stetig differenzierbares $f : G \to \mathbb{C}$ mit $G \supseteq \overline{D}$

$$-i \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f(z) \, dz$$

interpretiert als Zweivektor mit

$$\int_{\partial^o D} \phi_f(y) v(y) \, d\mu(y)$$

übereinstimmt. Dabei ist μ das Oberflächenmaß von $\partial^o D$ und $\phi_f(y) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(z) & -\operatorname{Im} f(z) \\ \operatorname{Im} f(z) & \operatorname{Re} f(z) \end{pmatrix}$.

Schließlich zeige mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes, dass

$$\frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f(z) \, dz = \int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \, d\lambda_2(z) \ .$$