Vierte Übung zu Komplexe Analysis (SS 2013)

1. Zeige: Ist $p \in \mathbb{N}, p > 1$, D einfach zusammenhängend und $f : D \to \mathbb{C},\ f \not\equiv 0$, holomorph, sodass die Vielfachheit einer jeden Nullstelle durch p teilbar ist. Zeigen Sie unter der zusätzlichen Annahme, dass $f^{-1}\{0\}$ endlich ist, dass f genau p-viele paarweise verschiedene eine holomorphe p-te Wurzeln hat, es also p-viele $g : D \to \mathbb{C}$ gibt mit $g^p = f$.

2. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C},\ j = 1, \ldots, m$, geschlossene, stetig differenzierbare Wege, sodass die Abbildungen $\gamma_j|_{(a_j,b_j)}$ Einbettungen in den orientierbaren Rand $\partial^o D$ sind und sodass

$$\partial^o D \setminus \dot{\bigcup}_{j=1,\ldots,m} \gamma_j(a_j, b_j) \quad \text{und} \quad \partial D \setminus \partial^o D$$

endliche Mengen sind. Dann folgt mit der gleichen Argumentation wie im Beispiel 10 der dritten Übung, dass

$$\frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f(z)\ dz = \int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\ d\lambda_2(z)\ ,$$

für jedes stetig differenzierbare $f : G \to \mathbb{C}$ mit $G \supseteq \overline{D}$, wenn $-i\gamma_j'(t)$ interpretiert als Zweivektor immer ins Äußere von D zeigt – also ein positives Vielfache der äußeren Normalen $v(y)$ mit $y = \gamma_j(t)$ ist.

Leiten Sie daraus ab, dass ($z \in D$)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z}\ d\lambda_2(\zeta)\ .$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass das Flächenintegral überhaupt existiert. Wenden das engangs erwähnte Faktum auf $D_\epsilon := D \setminus K_\epsilon(z)$ für hinreichend kleine $\epsilon > 0$ an.

3. Seien $G \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\phi \in C_{00}^\infty(D)$ (unendlich oft differenzierbar mit kompakten Träger $\operatorname{supp}\phi$, welcher in D enthalten ist) sodass $\phi|_G \equiv 1$. $f : D \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Man zeige zunächst, dass

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\operatorname{supp}\phi \setminus G} \frac{f(\zeta) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z}\ d\lambda_2(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z}\ d\lambda_2(\zeta)$$

für jedes $z \in G$.

Zeigen Sie damit, dass es zu jedem $z \in D$ ein (von f unabhängiges) $C_z > 0$ gibt, sodass

$$|f(z)| \leq C_z\ \|f\|_2 := \sqrt{\int_D |f|^2\ d\lambda_2}$$

für alle holomorphen $f : D \to \mathbb{C}$ mit $f \in L^2(D, \mathfrak{B}_2 \cap D, \lambda_2|_{\mathfrak{B}_2 \cap D}, \mathbb{C})$.

4. Zu jeder der unten stehenden Funktionen f gebe man das maximale $D \subseteq \mathbb{C}_\infty$ an, worauf f unmittelbar definiert – wo also alle Terme in der beschreibenden Formel in $\mathbb{C}$ existieren und wo etwaige Nenner nicht Null

werden – und holomorph ist. Man bestimme weiters alle Nullstellen von f in D und die entsprechende Nullstellenvielfachheit. Schließlich bestimme man alle isolierte Singularitäten $w \in \mathbb{C}_\infty$ von $f : D \to \mathbb{C}_\infty$, dh. alle $w \in \mathbb{C}_\infty \setminus D$, sodass $D \cup \{w\}$ offen ist. Bestimme dabei den Typ der Singularität und die entsprechende Polordnung!

(a) $f(z) := \frac{(z^2+9)^2}{(z^2-1)(z+i)}$,

(b) $f(z) := \cot\left(\frac{1}{z}\right)$,

(c) $f(z) := \frac{e^z}{z^2}$,

(d) $f(z) := e^{\tan z}$.

5. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in G$, und $f \in H(G \setminus \{w\})$. Hat f habe an der Stelle w eine Polstelle der Ordnung m, dann zeige man, dass

$$\operatorname{Res}(f, w) = \frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}\Big((z-w)^m f(z)\Big)\right]_{z=w}$$

Man zeige weiters, dass für $f = \frac{h}{g}$ mit auf G holomorphen h, g, sodass $h(w) \neq 0$ und g bei w eine einfache Nullstelle hat,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{h}{g}, w\right) = \frac{h(w)}{g'(w)}$$

6. Berechne die Residuen von $f(z)$ an allen isolierten singulären Stellen in $\mathbb{C}$:

(a) $f(z) := \frac{\sin^{100}(z)}{z}$

(b) $f(z) := \frac{z^2+2}{z^2-4}$,

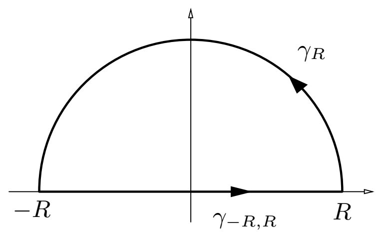
(c) $f(z) := \frac{z^3+z^2}{\sin^3 z}$,

(d) $f(z) := e^{\frac{1}{z}}$.

7. Seien p, q Polynome mit $\operatorname{grad} q \geq \operatorname{grad} p + 2$, und sei $q(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Seien $\{w_1, \dots, w_n\}$ die Menge der Nullstellen von q in der oberen Halbebene. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, w_k\right)$$

Hinweis: Integriere die Funktion $f(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$ längs dem Weg $\gamma = \gamma_R + \gamma_{-R,R}$ und lasse $R \to \infty$ streben.



8. (a) Sei $a > 0$. Berechne das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\,dx\,.$$

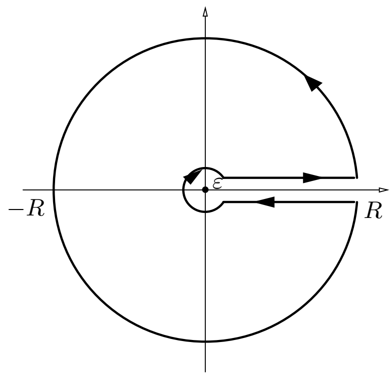
Hinweis: Verwende die gleiche Methode wie im letzten Beispiel, nur mit $f(z) := \frac{e^{iaz}}{1+z^2}$.

(b) Wie könnten geeignete Voraussetzungen an eine Funktion f lauten, damit sich diese Methode anwenden läßt um das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ auszurechnen?

9. Sei $a \in (-1,1) \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{(1+x)^2}\,dx = \frac{\pi a}{\sin(\pi a)}\,.$$

Hinweis: Es bezeichne $\log z$ jenen Zweig des Logarithmus, der auf $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ analytisch ist und $\log(-1) = i\pi$ erfüllt. Integriere die Funktion $f(z) := \frac{\exp(a \log z)}{(1+z)^2}$ längs des folgenden Weges und lasse $R \to \infty$ und $\epsilon \to 0$ streben.



10. Die Funktion f habe an der Stelle w einen einfachen Pol. Sei $\alpha \geq 0$, und sei γ_r^α der Weg $\gamma_r^\alpha(t) := re^{i\alpha t}$, $t \in [0,1]$. Dann gilt

$$\lim_{r \searrow 0} \int_{\gamma_r^\alpha} f(\zeta)\,d\zeta = \alpha i \,\mathrm{Res}(f,w)\,.$$