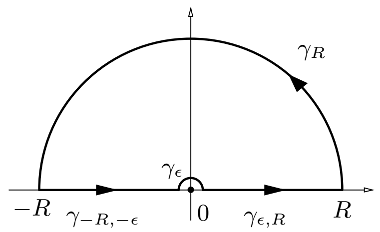
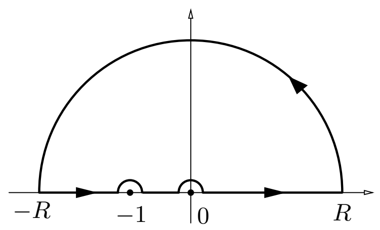
Fünfte Übung zu Komplexe Analysis (SS 2013)

1. Zeige $\int_0^\pi e^{-R\sin x}\,dx \leq \frac{\pi}{R}$.
   Hinweis: Zeige, und benütze, die Ungleichung $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Berechne das Integral
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\,.$$
   Hinweis: Integriere die Funktion $f(z) := \frac{e^{iz}}{z}$ längs des Weges $\gamma = \gamma_R + \gamma_{-R,-\epsilon} + \gamma_\epsilon + \gamma_{\epsilon,R}$.



3. Berechne das Integral
$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx\,.$$
   Hinweis: Es bezeichne $\log z$ jenen Zweig des Logarithmus, der auf $\mathbb{C} \setminus [0, -i\infty)$ analytisch ist und $\log(1) = 0$ erfüllt. Integriere die Funktion $f(z) := \frac{\log z}{z^2-1}$ längs des folgenden Weges.



4. Seien Daten wie im Satz vom logarithmischen Residuum gegeben. Weiters sei $h \in H(G)$. Verwende den Residuensatz um zu zeigen, dass
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma h(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \sum_{w\in N}\alpha(w)n(\gamma,w)h(w) - \sum_{w\in P}\beta(w)n(\gamma,w)h(w)\,.$$

5. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in G$, und $r > 0$, sodass $K_r(w) \subseteq G$. Weiters sei $f \in H(G)$, und sei vorausgesetzt, dass $f|_{U_r(w)}$ injektiv ist. Zeige, dass die Umkehrfunktion von f gegeben ist als
$$f^{-1}(b) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial U_r(w)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-b}\,d\zeta, \quad w \in f(U_r(w))\,.$$
   Man zeige auch, dass für $f \in H(G)$ mit $f'(w) \neq 0$ für hinreichend kleines $r > 0$ die $f|_{U_r(w)}$ injektiv ist.

   Hinweis: Verwende das vorige Beispiel mit $h(z) := z$.

6. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in G$, $f \in H(G)$, und sei α die Nullstellenvielfachheit von $z \mapsto f(z) - f(w)$. Zeigen Sie, dass für hinreichend kleines $r > 0$ mit $K_r(w) \subseteq G$ sich die Funktion $f|_{U_r(w)}$ als

$$f|_{U_r(w)} = f(w) + [g(z)]^\alpha$$

schreiben lässt, wobei $g : U_r(w) \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv (also konform) ist.

7. Man beweise die folgende Verallgemeinerung des Lemmas von Schwarz: Sei $f(z)$ analytisch in $\mathbb{D}$ und sei $z_0 \in \mathbb{D}$. Sei n die Vielfachheit der Nullstelle z_0 der Funktion $f(z) - f(z_0)$. Ist $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, so gilt

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|^n$$

für $|z| < 1$.

Ist $f(z_0) = 0$, und gilt in dieser Ungleichung für ein $z \in \mathbb{D}$ Gleichheit, so ist $f(z) = e^{i\psi} \cdot (\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z})^n$ mit einem $\psi \in [0, 2\pi]$.
Hinweis: Man wende das Maximumprinzip auf

$$g(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \bar{f}(z_0) f(z)} : \left(\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right)^n$$

an.

8. Für $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ sei $D(z_1, z_2) := |\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2} z_1}|$. Man zeige, dass D eine Metrik auf der Einheitskreisscheibe ist, die invariant ist unter jeder Funktion $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, d.h.

$$D\big(f(z_1), f(z_2)\big) = D(z_1, z_2), \quad f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})\,.$$

9. Zeige, dass jede Funktion $f \in H(\mathbb{D})$ mit $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, eine Kontraktion des metrischen Raumes $\langle \mathbb{D}, D \rangle$ ist.

10. Sei $\phi \in C^1_{00}(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass $\psi : z \mapsto -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\lambda_2(\zeta)$ aus $C^1(\mathbb{C})$ ist, und dass $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = \phi$. Schließlich zeige man, dass aus $\phi \in C^\infty_{00}(\mathbb{C})$ folgt, dass auch $\psi \in C^\infty(\mathbb{C})$.

    Hinweis: Um $\psi \in C^1(\mathbb{C})$ zu zeige, substituiere man $\zeta = \eta + z$.