Sechste Übung zu Komplexe Analysis (SS 2013)

1. Weisen Sie die in Bemerkung 3.1.5 gemachte Behauptung nach!

2. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, und bezeichne $H(D)$ die Menge der auf D holomorphen Funktionen. Zeigen Sie, dass sich der Raum $H(D) \cap L^2(D, \mathfrak{B}_2 \cap D, \lambda_2|_{\mathfrak{B}_2 \cap D}, \mathbb{C})$ aller auf D nach λ_2 quadratisch integrierbaren Funktion stetig in $C(D, \mathbb{C})$ einbetten lässt, wenn man $C(D, \mathbb{C})$ mit der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz versieht.

   Zeigen Sie auch, dass $H(D) \cap L^2(D, \mathfrak{B}_2 \cap D, \lambda_2|_{\mathfrak{B}_2 \cap D}, \mathbb{C})$ mit $\|.\|_2$ ein Banachraum ist, und sich daher als abgeschlossener Unterraum von $L^2(D, \mathfrak{B}_2 \cap D, \lambda_2|_{\mathfrak{B}_2 \cap D}, \mathbb{C})$ sehen lässt!

   Hinweis: Konvergenz im quadratischen Mittel impliziert die Konvergenz einer Teilfolge fast überall.

3. Ist die Einheitskugel von $H(D) \cap L^2(D, \mathfrak{B}_2 \cap D, \lambda_2|_{\mathfrak{B}_2 \cap D}, \mathbb{C})$ versehen mit $\|.\|_2$ eine normale Familie in $C(D, \mathbb{C})$?

4. Sei $f : D \to \mathbb{D}$ $(\mathbb{C})$ holomorph, wobei $D = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im} z < +1\}$. Angenommen es gilt $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$. Man zeige, dass dann auch $\lim_{|x| \to +\infty} f(x + iy) = 0$ für alle $y \in (-1, 1)$.

   Hinweis: Betrachte $\mathcal{F} := \{z \mapsto f(z+r) : r \in \mathbb{R}\}$ als Familie von Funktionen auf $(-1, 1) \times (-1, 1)$.

5. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass f dann auch schwach holomorph ist, dass also

$$0 = \int_{\mathbb{C}} f(\zeta) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(\zeta) \, d\lambda_2(\zeta) \,,$$

   für alle $\psi \in C_{00}^{\infty}(D)$.

   Hinweis: Beispiel zwei der vierten Übung angewandt auf.

6. Für ein offenes $D \subseteq \mathbb{C}$ sei $f \in L^1_{loc}(D)$. Zeigen Sie, dass aus

$$0 = \int_{\mathbb{C}} f(\zeta) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(\zeta) \, d\lambda_2(\zeta)$$

   für alle $\psi \in C_{00}^{\infty}(D)$ folgt, dass f fast überall auf D mit einer holomorphen Funktion übereinstimmt, also dass aus der schwachen Holomorphie von f die Holomorphie folgt.

   Hinweis: Für ein kompaktes $K \subseteq D$ und ein $\phi \in C_{00}^{\infty}(D)$ mit $\mathbb{1}_K \leq \phi \leq 1$ Sei $g(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(\zeta) \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\lambda_2(\zeta), \; z \in K^{\circ}$. Nun zeige man mit Hilfe von Fubini, dem letzten Beispiel der fünften Übung, der Produktregel angewandt auf

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\phi(\zeta) \int \frac{\psi(z)}{z - \zeta} \, d\lambda_2(z) \right) ,$$

   dem letzten Beispiel der fünften Übung und der Voraussetzung, dass $\int \psi(z) g(z) \, d\lambda_2(z) = \int \psi(z) f(z) \, d\lambda_2(z)$ für alle $\psi \in C_{00}^{\infty}(K^{\circ})$.

7. Bestimmen Sie eine konforme Abbildung

- von $\mathbb{C}^+$ auf $\mathbb{D}$ ($\mathbb{C}^+$ die obere Halbebene)
- von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{C}^+$
- von $\mathbb{D}$ auf die offene rechte Halbebene
- vom offenen ersten Quadranten auf die offene rechte Halbebene
- von $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im} z < +1\}$ auf $\mathbb{D}$

8. Bestimmen Sie eine konforme Abbildung

    - von $\mathbb{D} \cap \mathbb{C}^+$ auf $\mathbb{D}$
    - von der rechten Halbebene auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$
    - von $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < +1\}$ auf die offene rechte Halbebene

9. Bestimmen Sie $\operatorname{Aut}(\mathbb{C}^+)$, wobei $\mathbb{C}^+$ die obere Halbebene ist!

10. Zeigen Sie, dass $\{f \in H(\mathbb{D}) : f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}\}$ in $C(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ eine normale Familie ist. Wie verhält es sich mit $\{f \in H(\mathbb{D}) : f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C}^+\}$ bzw. $\{f \in H(\mathbb{D}) : f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C}^+, f(0) = i\}$?