Siebte Übung zu Komplexe Analysis (SS 2013)

1. Sei Y ein komplexer Banachraum, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $f : D \to Y$ schwach holomorph, dh. $z \mapsto y' \circ f(z)$ is holomorph auf D für alle $y \in Y'$ (topologische Dualraum). Zeigen Sie, dass dann f auch holomorph ist.

   Hinweis: Zeigen Sie zuerst mit dem Satz von Banach-Steinhaus, dass $\|f(z)\|_Y \leq C_K,\ z \in K$, für jedes kompakte $K \subseteq D$. Dabei könnte es hilfreich sein die $f(z)$ als Elemente von Y'' zu betrachten. Nun zeige man, dass f stetig ist, indem man mit der Cauchyschen Integralformel

   $$\sup_{\|y'\|\leq 1,\ z \in U_\epsilon(w)} \left| \frac{y' \circ f(z) - y' \circ f(w)}{z - w} \right| < +\infty$$

   für jedes fest $w \in D$ mit $K_{2\epsilon}(w) \subseteq D$ zeigt. Schießlich wende man den Satz von Morera an!

2. Sei $f \in H(D)$ für ein offenes $D \subseteq \mathbb{C}$ und $a_0, \dots, a_n \in D$. Zeigen Sie, dass

   $$p(z) = f(z) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} \int_{\alpha_j} \prod_{k=0}^{n} \frac{z - a_k}{\zeta - a_k}\, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

   das eindeutige Polynom vom Grad $\leq n$ ist, welches $p(a_k) = f(a_k)$ für $k = 0, \dots, n$, erfüllt. Hier sind die Wege α_j wie in Satz 4.1.1 gewählt, wobei $K = \{a_0, \dots, a_n\}$.

3. Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und auf $K_1(0)$ stetig fortsetzbar, wobei $|f(z)| < 1$ für $|z| = 1$. Wieviele Lösungen hat die Gleichung $f(z) = z^3$ in $\mathbb{D}$?

4. Wieviel Nullstellen hat $p(z) = z^5 + 4z^2 + 2z + 1$ in $\mathbb{D}$?

5. Zeigen Sie, dass $p_n(z) = (1 + \frac{z}{n})^n$ auf $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig gegen $\exp(z)$ konvergiert, indem Sie zeigen, dass $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ lokal beschränkt ist, und indem Sie $\lim_{n\to\infty} p_n^{(k)}(0)$ für alle k bestimmen.

6. Sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ |2z - 1| > 1\}$ Bestimmen Sie die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}_\infty \setminus D$ und von $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{D}$!

   Lässt sich jedes $f \in H(D)$ lokal gleichmäßig durch Polynome approximieren?

   Lässt sich jedes $f \in H(D)$ gleichmäßig durch Polynome approximieren?

   Hinweis für die letzte Aussage: Suchen Sie ein $f \in H(D)$, welches sich nicht auf den Abschluss von D stetig fortsetzen lässt!

7. Zeigen Sie: Gilt für ein kompaktes $K \subseteq \mathbb{C}$, dass $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ mindestens zwei Zusammenhangskomponenten hat, so gibt es ein $f \in H(K)$, welches sich nicht gleichmäßig auf K durch Polynome approximieren lässt!

   Hinweis: Sei w aus einer beschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ und betrachte $f(z) = \frac{1}{z-w}$. Würde sich f durch Polynome approximieren lassen, so erhält man $|(z-w)p(z)-1| < 1, z \in K$, für eingewisses Polynom p.

8. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei. Angenommen f hat für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine holomorphe n-te Wurzel auf G. Zeigen Sie, dass f dann auch einen holomorphen Logarithmus auf G hat.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass für $h = \frac{f'}{f}$ das Vectorfeld ϕ_h wegunabhängig ist; vgl. Proposition 1.9.3 und auch Bem. 1.7.6. Dafür betrachte man die entsprechenden Wegintegrale über geschlossene Wege als Umlaufzahlen. Was bedeutet die Voraussetzung für diese Umlaufzahlen?

9. Geben Sie irgendeine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ an, deren Polstellen genau $\mathbb{Z}$ sind, und wo der Hauptteil bei $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{z-n}$ ist.

10. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zahlen in $\mathbb{D}$, sodass die Blaschkebedingung

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |a_k|) < \infty.$$

   Man beweise, dass das unendliche Produkt (Blaschkeprodukt)

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{|a_k|} \frac{(a_k - z)}{(1 - \overline{a_k} z)},$$

   auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{D}$ gleichmässig konvergiert.