Übung zu Komplexer Analysis (SS 2015)

1.Übung (17.3.2015)

1. Sei $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, sodass also $\langle \mathbb{T}, \cdot \rangle$ eine Untergruppe von $\langle \mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ ist. Sei $a \in \mathbb{T}$, und setze $P_a := \{a^n : n \in \mathbb{N}\}$. Bestimme den Abschluss $\overline{P_a}$ von P_a (wie immer bzgl. der von der euklidischen Topologie von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{T}$ induzierten Topologie). Weiters bestimme den Abschluss der von a in $\mathbb{T}$ erzeugten Untergruppe $\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$.
   Hinweis: Unterscheide die Fälle $a = e^{2\pi i \varphi}$ mit φ rational oder irrational.

2. Die *Joukowski-Abbildung* ist definiert als $J(z) = z + \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeige, dass $J \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$.

   Sei $E \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Teilmenge die die Eigenschaft hat für kein $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gleichzeitig die beiden Punkte w und w^{-1} zu enthalten. Zeige, dass dann $J|_E$ injektiv ist.

3. Bestimme die Bilder der Kurven $|z| = \text{const}$ bzw. $\arg z = \text{const}$ unter J (Zeichnung!). Auf welche Mengen wird das Äußere des Einheitskreises (d.h. $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$) bzw. die offene rechte Halbebene (d.h. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$) unter J abgebildet?

Betrachtet man das Verhalten einer Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ am Rand ihres Konvergenzkreises, so könnte man vermuten, dass die Divergenz/Konvergenz der Potenzreihe in gewisser Beziehung zum Verhalten der dargestellten Funktion f steht. Dass das im allgemeinen nicht so ist haben wir am Beispiel der Reihen $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ schon gesehen. In gewissen Fällen besteht jedoch schon ein Zusammenhang.

4. Der *Abelsche Grenzwertsatz* besagt: Betrachte eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit Konvergenzradius 1. Sei angenommen, dass

   – alle Koeffizienten c_n reell sind,
   – die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = s$ konvergiert.

   Dann gilt $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in [0,1)}} f(z) = s$.

   Verwende diesen Satz um die beiden folgenden Beziehungen zu zeigen.

   $$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots, \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots$$

   Weiters zeige mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass der Abelsche Grenzwertsatz im allgemeinen nicht umkehrbar ist (das nämlich aus der Existenz des Limes nicht die Konvergenz der Reihe folgen muss).
   Hinweis: Zur Berechnung der obigen Summen verwende die (reelle) Potenzreihenentwicklung von $\ln(1+x)$ bzw. $\arctan x$ um $x_0 = 0$.

5. Betrachte eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit Konvergenzradius 1. Sei angenommen, dass

   – alle Koeffizienten c_n reell sind,
   – die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eigentlich divergent ist, d.h. dass die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_n := c_0 + \ldots + c_n$ entweder gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ strebt.

   Zeige, dass dann $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in [0,1)}} |f(z)| = \infty$.

   Insbesondere existiert kein Gebiet G mit $G \supseteq \mathbb{D} \cup \{1\}$, sodass f eine Fortsetzung $g \in H(G)$ hat (hier bezeichnet $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$).
   Hinweis: Betrachte die Potenzreihenentwicklung von $f(z) \cdot \frac{1}{1-z}$.

6. Man zeige den folgenden *Satz von Tauber*: Betrachte eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit Konvergenzradius 1. Sei angenommen, dass

   – $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in (0,1)}} f(z) = s \in \mathbb{C}$,

– $\lim_{n\to\infty} n \cdot c_n = 0$.

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent und hat die Summe s.
Hinweis: Man setze $s_N = \sum_{n=0}^{N} c_n$, $N = [\frac{1}{1-|z|}]$ und betrachte $s_N - f(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n(1-z^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n z^n$. Wählt man z so nahe bei 1, dass $\forall m \geq N : |nc_n| < \varepsilon$, so zeigt man $|\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n z^n| < \varepsilon$. Zur Abschätzung des ersten Summanden beachte man, dass $1 - z^n = (1-z)(1+z+\ldots+z^{n-1})$ gilt und in obigem Winkelraum $|1-z| \leq M(1-|z|)$ ist (M konstant, z nahe bei 1). Da für eine Nullfolge auch die Folge der arithmetischen Mittel gegen Null strebt, kann man für z hinreichend nahe bei 1 auch die erste Summe beliebig klein machen.

Der Satz aus der Vorlesung, dass der Konvergenzradius einer Potenzreihe gleich dem Radius des größten Kreises ist wo die dargestellte Funktion analytisch ist, zeigt dass die von einer Potenzreihe dargestellte Funktion nicht auf ein die gesamte abgeschlossene Konvergenzkreisscheibe umfassendes Gebiet analytisch fortgesetzt werden kann. Die bisher betrachteten Potenzreihen hatten jedoch die Eigenschaft, dass die im Inneren des Konvergenzkreises dargestellte Funktion zumindest noch auf gewisse Punkte außerhalb des Konvergenzkreises analytisch fortgesetzt werden kann. Das nächste Beispiel zeigt, dass nicht einmal das immer der Fall sein muss.

7. Die *Lückenreihe* $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ hat Konvergenzradius 1, also ist $f \in H(\mathbb{D})$. Zeige, dass es kein Gebiet $G \supsetneq \mathbb{D}$ gibt, sodaß f eine Fortsetzung $g \in H(G)$ hat.
   Hinweis: Zeige, dass für jede Einheitswurzel[1] ξ gilt das $\lim_{r\nearrow 1} f(r\xi) = +\infty$.

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann nennt man die Funktion $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die *erzeugende Funktion* der Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Es ist dann interessant Eigenschaften der Funktion mit Eigenschaften der Folge in Verbindung zu setzen.

8. Sei $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen. Diese ist rekursiv definiert durch $c_0 = c_1 = 1$ und $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$. Zeige, dass für hinreichend kleine Werte von $|z|$
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{1}{1-z-z^2}\,.$$

9. Sei $N \geq 1$ und $\gamma_0, \ldots, \gamma_{N-1} \in \mathbb{C}$, $\gamma_0 \neq 0$ und $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1}) \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ die durch die N-stufige lineare Rekursion
$$\begin{cases} a_{n+N} = \gamma_{N-1} a_{n+(N-1)} + \ldots + \gamma_0 a_n, & n = 0, 1, 2, \ldots\,, \\ a_n = \alpha_n, & n = 0, \ldots, N-1. \end{cases}$$
   gegebene Folge komplexer Zahlen. Finde eine Darstellung der erzeugenden Funktion dieser Folge als rationale Funktion.

10. Zeige, dass es eine Nullstelle δ_0 des Polynoms $1 - \gamma_{N-1} z - \ldots - \gamma_0 z^N$ gibt sodass[2]
$$\inf\left\{\delta > 0 : a_n = \mathrm{O}(\delta^n)\right\} = \frac{1}{|\delta_0|}.$$
   Verwende dazu den Satz aus der Vorlesung, dass der Konvergenzradius einer Potenzreihe gleich dem Radius des größten Kreises ist wo die dargestellte Funktion analytisch ist.
   Bemerkung: Diese Aussage (tatsächlich sogar eine etwas schärfere) könnte man auch anders erhalten. Nämlich aus der Lösungstheorie linearer Rekursionen die eine Darstellung der allgemeinen Lösung einer linearen Rekursion liefert.

[1] Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt *Einheitswurzel*, wenn $\exists\, n \in \mathbb{N} :\ z^n = 1$.
[2] Man schreibt $x_n = \mathrm{O}(y_n) :\Leftrightarrow\ \exists\, C > 0\ \forall n \in \mathbb{N} :\ |x_n| \leq C|y_n|$
[§] Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).