Übung zu Komplexer Analysis (SS 2015)

2.Übung (14.4.2015)

11. Ein *allgemeiner Kreis* in $\mathbb{C}_\infty$ ist ein Kreis in $\mathbb{C}$ oder eine Gerade gemeinsam mit dem Punkt ∞. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $w \in \mathbb{C}$ wird durch die Gleichung

$$\beta z\bar{z} - w\bar{z} - \bar{w}z + \alpha = 0,$$

der endliche Teil eines allgemeinen Kreises dargestellt? Lassen sich alle allgemeinen Kreise in dieser Weise darstellen? Für welche Koeffizienten erhält man einen allgemeinen Kreis dessen endlicher Teil eine Gerade ist?

Sei $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $M = (m_{jk})_{j,k=1}^2$, und setze $G_M := \{z \in \mathbb{C} : m_{21}z + m_{22} \neq 0\}$. Die Abbildung $f_M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ die definiert ist als

$$f_M(z) := \begin{cases} \frac{m_{11}z+m_{12}}{m_{21}z+m_{22}}, & z \in G_M \\ \infty & , \quad z \in \mathbb{C} \setminus G_M \\ \frac{m_{11}}{m_{21}} & , \quad z = \infty, m_{21} \neq 0 \\ \infty & , \quad z = \infty, m_{21} = 0 \end{cases}$$

heißt die *Möbiustransformation* (oder *gebrochen lineare Abbildung*) mit Koeffizienten M.

14. Bezeichne mit $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ die Menge aller Matrizen $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $\det M \neq 0$, und bezeichne mit $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ die Menge aller Homöomorphismen des metrischen Raumes $\langle \mathbb{C}_\infty, \chi \rangle$ auf sich selbst. Es sind $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ mit der Matrizenmultiplikation und $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ mit der Hintereinanderausführung Gruppen.

    Zeige, dass die Abbildung $M \mapsto f_M$ ein Gruppenhomomorphismus von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ ist. Bestimme seinen Kern.

15. Zeige die folgenden Aussagen.

    (a) Für jedes $M \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ ist die Menge $G_M \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f_M|_{G_M} \in H(G_M)$.

    (b) Jede Matrix $M \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ läßt sich als Produkt von Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ anschreiben. In anderen Worten: Jede Möbiustransformation läßt sich als Hintereinanderausführung von Translationen $f_\beta(z) := z + \beta$, Drehstreckungen $f_\alpha(z) := \alpha z$ und Inversionen $I(z) := \frac{1}{z}$ schreiben.

    (c) Das Bild eines allgemeinen Kreises unter einer Möbiustransformation ist ein allgemeiner Kreis. Benütze dazu (b).

16. Seien (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) jeweils drei verschiedene Punkte von $\mathbb{C}_\infty$. Zeige, dass es $M \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ gibt mit $f_M(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$.
    Hinweis: Betrachte zuerst den Fall dass $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ und $w_3 = \infty$.

17. Bezeichne mit $\mathbb{C}^+$ die offene obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$. Zeige, dass

$$f_M(\mathbb{C}^+) = \mathbb{C}^+ \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \lambda M \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \det(\lambda M) > 0$$

18. Sei $f(z) := |z|^2$, und sei γ der Weg der aus den Seiten des Quadrates mit den Eckpunkten $0, 1, 1+i, i$ besteht, die der Reihe nach im positiven Sinne durchlaufen werden. Berechne, durch tatsächliches Ausrechnen, das Integral $\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta$.

19. Sei γ die positiv orientierte Einheitskreislinie. Man berechne die Integrale $\oint_\gamma \frac{\exp 2\zeta}{(3\zeta+1-i)^3}\, d\zeta$ und $\oint_\gamma \frac{\sin(\pi\zeta^2)}{2\zeta - i}\, d\zeta$.

20. Sei $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Man berechne die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-x^2\cos(2\alpha)} \cdot \cos\Big(x^2 \sin(2\alpha)\Big)\, dx$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2\cos(2\alpha)} \cdot \sin\Big(x^2 \sin(2\alpha)\Big)\, dx$$

Als Sonderfall für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ berechne man die sogenannten *Fresnelschen Integrale*

$$\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\, dx, \quad \int\limits_0^\infty \sin(x^2)\, dx.$$

Hinweis: Man integriere die Funktion $f(z) := e^{-z^2}$ längs dem Weg γ, der sich aus der Strecke $[0, R]$, dem Kreisbogen von R zu $Re^{i\alpha}$, und aus der Strecke $[Re^{i\alpha}, 0]$ besteht.

§Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).