Übung zu Komplexer Analysis (SS 2015)

3.Übung (28.4.2015)

21. Finde eine Funktion $f \in C(\mathbb{D})$ mit der folgenden Eigenschaft:
Für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in \mathbb{D}$ und $|z_n| \to 1$, gilt dass $|f(z_n)| \to \infty$.
Gibt es eine solche Funktion $f \in \mathbb{H}(\mathbb{D})$?
Hinweis: Betrachte $\frac{p}{f}$ wobei p ein geeignetes Polynom ist.

22. Man bestimme alle analytischen Funktionen mit der Eigenschaft:

    (a) Längs der Geraden $\operatorname{Im} z = \text{const}$ ist $|f(z)|$ konstant.

    (b) Längs der Kreise $x^2 + y^2 = cx$ ist $\operatorname{Re} f(z)$ konstant.

    Hinweis: Im ersten Fall betrachte man $\log f(z)$, im zweiten Fall $f(\frac{1}{z})$, und verwende die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

23. Man beweise die folgende Verallgemeinerung des Lemmas von Schwarz: Sei $f(z)$ analytisch in $\mathbb{D}$ und sei $z_0 \in \mathbb{D}$. Sei n die Vielfachheit der Nullstelle z_0 der Funktion $f(z) - f(z_0)$. Ist $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, so gilt
$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|^n$$
für $|z| < 1$.
Ist $f(z_0) = 0$, und gilt in dieser Ungleichung für ein $z \in \mathbb{D}$ Gleichheit, so ist $f(z) = e^{i\psi} \cdot (\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z})^n$ mit einem $\psi \in [0, 2\pi]$.
Hinweis: Man wende das Maximumprinzip auf
$$g(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \bar{f}(z_0) f(z)} : \left(\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right)^n$$
an.

24. Für $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ sei $D(z_1, z_2) := |\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2} z_1}|$. Man zeige, dass D eine Metrik auf der Einheitskreisscheibe ist, die invariant ist unter jeder Funktion $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$, d.h.
$$D\big(f(z_1), f(z_2)\big) = D(z_1, z_2), \quad f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D}).$$

25. Zeige, dass jede Funktion $f \in H(\mathbb{D})$ mit $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, eine Kontraktion des metrischen Raumes $\langle \mathbb{D}, D \rangle$.

26. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in G$, und $r > 0$ sodass $\overline{U_r(a)} \subseteq G$. Weiters sei $f \in H(G)$, und sei vorausgesetzt dass $f|_{U_r(a)}$ injektiv ist. Zeige, dass die Umkehrfunktion von f gegeben ist als
$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(a)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} \, d\zeta, \quad w \in f(U_r(a)).$$

27. Sei $F \in \mathbb{H}(C)$ mit
$$\begin{aligned} &\exists\, \gamma > 0 : \quad |F(z)| \leq \exp\big(\gamma (\operatorname{Re} z)^2\big), \; z \in \mathbb{C}, \\ &|F(x)| \leq 1, \; x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Zeige, dass F konstant ist.
Hinweis: Das Prinzip von Phragmen-Lindelöf läßt sich nicht unmittelbar anwenden (mit F und den vier Quadranten). Betrachte, für $\delta > 0$ beliebig, $e^{i\delta z^2} F(z)$ in geeigneten Winkelräumen die den ersten Quadranten ausschöpfen, und lasse dann $\delta \to 0$ streben.

28. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar, und gelte $|f(x)| \leq \exp(-\frac{x^2}{2})$, $x \in \mathbb{R}$ f.ü. Sei $\hat{f}$ die Fouriertransformierte von f,

$$\hat{f}(z) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixz} \, dx \,.$$

Zeige das, falls $|\hat{f}(x)| \leq \exp(-\frac{x^2}{2})$, $x \in \mathbb{R}$ f.ü. gilt, die Funktion f ein skalares Vielfaches von der Funktion $\exp(-\frac{x^2}{2})$ ist.

Insbesondere kann für eine Funktion f die nicht identisch Null ist, niemals *gleichzeitig* $|f(x)| = \mathrm{o}\big(\exp(-\frac{x^2}{2})\big)$ *und* $|\hat{f}(x)| = \mathrm{o}\big(\exp(-\frac{x^2}{2})\big)$ gelten (Unschärferelation).

Hinweis: Zeige $\hat{f} \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ und $|\hat{f}(z)| = \mathrm{O}\big(\exp\big(\frac{(\operatorname{Im} z)^2}{2}\big)\big)$, $z \in \mathbb{C}$. Betrachte die Funktion $F(z) := \exp(\frac{z^2}{2})\hat{f}(z)$.

29. Man zeige mit Hilfe des Satzes von Rouché das gilt:

    (a) Die Gleichung $e^z = 3z^2$ hat im Einheitskreis zwei Lösungen.

    (b) Ein Polynom mit komplexen Koeffizienten vom Grad n hat genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ (wobei diese gemäß ihrer Vielfachheit gezählt werden).

30. Sei $|a_m| < 1$ für $m = 1, \ldots, n$ und $|b| < 1$. Zeige mit Hilfe des Satzes von Rouché, dass die Funktion

$$f(z) := \prod_{m=1}^{n} \frac{z - a_m}{1 - \overline{a_m} z}$$

den Wert b im Einheitskreis genau n-mal annimmt.

[§] Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).