Übung zu Komplexer Analysis (SS 2015)

4.Übung (12.5.2015)

31. Seien $f, g_n \in H(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, und sei vorausgesetzt dass für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$|g_n^{(k)}(0)| \leq |f^{(k)}(0)|,\ n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} g_n^{(k)}(0) \text{ existiert in } \mathbb{C}\,.$$
Zeige, dass die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}$ gegen eine gewisse Funktion $g \in H(\mathbb{C})$ konvergiert.

32. Sei $f \in H(G)$, und $z_0 \in G$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann ist also f lokal bei z_0 injektiv, und hat daher lokal bei $w_0 := f(z_0)$ eine analytische Umkehrfunktion. Zeige, dass die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung $f^{-1}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(w - w_0)^n$ dieser Umkehrfunktion gegeben sind als $c_0 = z_0$ und
$$c_n = \frac{1}{n!}\Big[\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\Big(\frac{z - z_0}{f(z) - w_0}\Big)^n\Big]_{z=z_0}, \quad n \geq 1\,.$$
Man beachte hier, dass die Funktion $\frac{z-z_0}{f(z)-w_0}$ an der Stelle z_0 analytisch ist (warum eigentlich?), und dass dieser Ausdruck daher wohldefiniert ist.
Hinweis: In der Formel aus dem vorigen Beispiel entwickle man geeignet in eine geometrische Reihe. Das gibt eine Reihendarstellung $f^{-1}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(w - w_0)^n$ wobei die c_n gewisse Integrale sind. Um diese weiter zu berechnen, integriere partiell und verwende den Residuensatz.

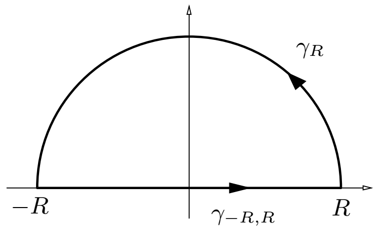
33. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in G$, und $f \in H(G \setminus \{w\})$. Hat f habe an der Stelle w eine Polstelle der Ordnung m, dann gilt
$$\operatorname{Res}(f, w) = \frac{1}{(m-1)!}\Big[\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}\Big((z - w)^m f(z)\Big)\Big]_{z=w}$$

34. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in G$, und $f, g \in H(G \setminus \{w\})$. Hat g and der Stelle w eine einfache Nullstelle, dann gilt
$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f}{g}, w\Big) = \frac{f(w)}{g'(w)}$$

35. Die Funktion f habe an der Stelle w einen einfachen Pol. Sei $\alpha \geq 0$, und sei γ_r^α der Weg $\gamma_r^\alpha(t) := re^{i\alpha t}$, $t \in [0, 1]$. Dann gilt
$$\lim_{r\searrow 0} \int_{\gamma_r^\alpha} f(\zeta)\, d\zeta = \alpha i \operatorname{Res}(f, w)\,.$$

36. Man bestimme alle Nullstellen (mit Vielfachheit) und alle isolierten Singularitäten (mit Feststellung des Typs) von $f(z)$ in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$:
    (a) $f(z) := \frac{(z^2+9)^2}{(z^2-1)(z+i)}$,
    (b) $f(z) := \cot\big(\frac{1}{z}\big)$,
    (c) $f(z) := \frac{e^z}{z^2}$,
    (d) $f(z) := e^{\tan z}$.

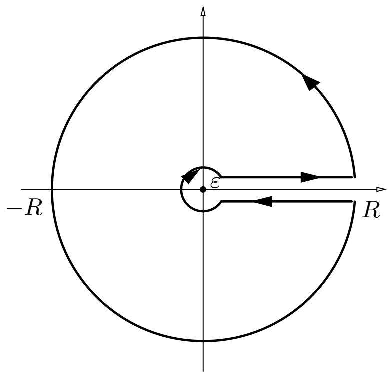
37. Seien p, q Polynome mit $\operatorname{grad} q \geq \operatorname{grad} p + 2$, und sei $q(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Seien $\{w_1, \dots, w_n\}$ die Menge der Nullstellen von q in der oberen Halbebene. Dann gilt
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\big(\frac{p}{q}, w_k\big)$$
Hinweis: Integriere die Funktion $f(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$ längs dem Weg $\gamma = \gamma_R + \gamma_{-R,R}$ und lasse $R \to \infty$ streben.



38. (a) Sei $a > 0$. Berechne das Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\, dx\,.$$
Hinweis: Verwende die gleiche Methode wie im letzten Beispiel, nur mit $f(z) := \frac{e^{iaz}}{1+z^2}$.

    (b) Wie könnten geeignete Voraussetzungen an eine Funktion f lauten, damit sich diese Methode anwenden läßt um das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ auszurechnen?

39. Sei $a \in (-1,1) \setminus \{0\}$. Dann gilt
$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{(1+x)^2}\, dx = \frac{\pi a}{\sin(\pi a)}\,.$$
Hinweis: Es bezeichne $\log z$ jenen Zweig des Logarithmus, der auf $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ analytisch ist und $\log(-1) = i\pi$ erfüllt. Integriere die Funktion $f(z) := \frac{\exp(a \log z)}{(1+z)^2}$ längs des folgenden Weges und lasse $R \to \infty$ und $\epsilon \to 0$ streben.



40. Man berechne die Summe der Reihe
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+k)^2},\ a \notin \mathbb{Z}\,.$$
Man folgere damit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Hinweis: Integriere die Funktion $f(z) := \frac{1}{(a+z)^2} \cdot \pi \cot(\pi z)$ längs des Quadrates mit den Eckpunkten $\pm(n+\frac{1}{2}) \pm i(n+\frac{1}{2})$. Zeige, dass die Funktion $\cot(\pi z)$ längs dieses Weges unabhängig von n beschränkt ist.

---

§Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).