# Übungsblatt 9

Diskussion des Blattes: Fr., 23.5.2014

**1.** Zeigen Sie, daß für das Lax-Friedrichs-Schema

$$\frac{1}{k}\left(u_i^{n+1} - \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right)\right) + \frac{a}{2h}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) = g(x_i, t_n)$$

unter der Voraussetzung der CFL-Bedingung $|ak/h| \le 1$ der Propagationsoperator $E$ die folgende Abschätzung erfüllt:

$$\|E\|_{\ell_h^1} \le 1$$

**2.** Betrachten Sie die Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung $u_t - u_{xx} = 0$ mittels des $\theta$-Schemas (und symmetrischen Differenzen im Ort):

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \sigma\left\{\theta\left(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right) + (1-\theta)\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)\right\}, \qquad \sigma := \frac{k}{h^2}$$

**a)** Zeigen Sie für das explizite Eulerverfahren ($\theta = 0$), daß der Verstärkungsfaktor $g(\xi) = 1 - 4\sigma\sin^2(\xi h/2)$. Was können Sie über die Stabilität des Verfahrens in Abhängigkeit von $k$ und $h$ aussagen?

**b)** Betrachten Sie das Crank-Nicolson-Verfahren ($\theta = 1/2$). Bestimmen Sie den Verstärkungsfaktor $g$. Hier ist es einfacher, mit dem Ansatz $u_j^n = g^n e^{-\mathrm{i}\xi jh}$ zu arbeiten. Für welche Kombinationen von $k$ und $h$ ist das Verfahren stabil?

**3.** Für vektorwertige Differenzenverfahren kann man eine von Neumann-Analyse auch durchführen. Entsprechend ist der Propagationsoperator $E$ eine Matrix. Im Fourierbild entsteht dann eine Matrix $\widehat{A}(\xi)$, $\xi \in [-\pi/h, \pi/h]$. Eine notwendige Bedingung ist dann, daß für den Spektralradius $\rho(\widehat{A}(\xi))$ gilt:

$$\rho(\widehat{A}(\xi)) \le 1 + Ck \qquad \text{uniform in } \xi \in [-\pi/h, \pi/h]. \tag{1}$$

**a)** Das *leap frog*-Verfahren für die Advektionsgleichung $u_t + au_x = 0$ ($a > 0$) ist ein Zweischrittverfahren gegeben durch

$$u_i^{n+1} - u_i^{n-1} = -\lambda\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right), \qquad \lambda = \frac{ka}{h}.$$

Überführen Sie das Zweischrittverfahren in ein Vektor-Einschrittverfahren mittels des Vektors

$$\mathbf{V}_i^n := \begin{pmatrix} u_i^n \\ u_i^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie Verstärkungsmatrix $\widehat{A}(\xi)$ an.

**b)** Berechnen Sie den Betrag der beiden Eigenwerte der Matrix

$$G = \begin{pmatrix} -2\mathbf{i}\lambda s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0,1]; s \in [-1,1].$$

**c)** Zeigen Sie: Für $0 < \lambda < 1$ gilt für das leap frog-Verfahren die Bedingung (1).

**4.** Programmieren Sie auf einem regelmäßen Gitter das upwind-Verfahren (für $2 \times 2$-Systeme) und das Lax-Friedrichs-Verfahren für das Problem

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x = 0 \qquad \text{auf } (0,1), \qquad \text{mit periodischen Randbedingungen } u(0) = u(1).$$

Zerlegen Sie hierzu wie in der VO die Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-$, um das korrekte Upwinding zu erzielen. Wählen Sie

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u_0(x) = \begin{cases} 1 & 0.25 \le x \le 0.75 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Plotten Sie das Ergebnis zum Zeitpunkt $T = 1$ für $h = 1/100$ und 2 verschiedene Wahlen von $\lambda = k/h$: $\lambda = 0.9$ und $\lambda = 1.1$.

*Bemerkung:* Eigentlich müßten die 2 Komponenten der Lösung bei $T = 1$ deckungsgleich sein. Die tatsächliche Verschiebung um zwei Gitterweiten braucht Sie nicht zu stören.