Übungen zu Topologie WS13/14, 1. Übung

1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Man zeige, dass die Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x)$ um die Punkte $x \in X$ folgende drei Eigenschaften haben:

   (a) Für jedes $x \in X$ ist $\mathfrak{U}(x)$ ein Filter.

   (b) Für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathfrak{U}(x)$ gilt $x \in U$.

   (c) Für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt es ein $W \in \mathfrak{U}(x)$ mit $W \subseteq U$, sodass für alle $y \in W$ gilt, dass $U \in \mathfrak{U}(y)$.

   Zeigen Sie auch umgekehrt, dass wenn für alle $x \in X$ ein Mengensystem $\mathfrak{U}(x)$ mit obigen Eigenschaften gegeben ist, es eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ auf X gibt, sodass die $\mathfrak{U}(x)$ genau die Umgebungsfilter sind.

   Hinweis für die Umkehrung: Definieren Sie $\mathcal{T}$ als die Menge aller Mengen O mit $O \in \mathfrak{U}(x)$ für alle $x \in O$. Zeigen Sie auch, dass für $U \in \mathfrak{U}(x)$ die Menge $\{z \in U : U \in \mathfrak{U}(z)\}$ offen ist.

2. Sei X eine unendliche Menge und sei $\mathcal{T}$ die Menge aller Komplemente endlicher Mengen angereichert und die leere Menge (Kofinite Topologie).

   Man zeige, dass $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist. Weiters zeige man, dass jede Umgebung eines Punktes von X schon offen ist. Ist $(X, \mathcal{T})$ kompakt, ist es Hausdorffsch? Sind einpunktige Mengen offen?

3. Sei X eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $h : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ heißt Kuratowski-Mengenfunktion, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

   (a) $h(\emptyset) = \emptyset$

   (b) $A \subseteq h(A)$ für alle $A \in \mathfrak{P}(X)$

   (c) $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$

   (d) $h \circ h = h$

   Man zeige: Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und ist $h(A) := \overline{A}$, so ist h eine Kuratowski-Mengenfunktion.

   Man zeige auch: Ist h eine Kuratowski-Mengenfunktion auf einer Menge X, so gibt es eine eindeutige Topologie, sodas $h(A) := \overline{A}$ für alle $A \subseteq X$.

4. Sei $[-\infty, +\infty)$ versehen mit $\mathcal{T} := \{[-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty]\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie ist, die nicht Hausdorffsch ist! Bestimmen Sie $\mathfrak{U}(x)$ für $x \in [-\infty, +\infty)$! Zeigen Sie, dass für ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ aus $[-\infty, +\infty)$ und $x \in [-\infty, +\infty)$, $(x_i)_{i\in I} \to x$ bzgl. $\mathcal{T}$ genau dann wenn $x = \limsup_{i\in I} x_i$ (bzgl. der euklidischen Topologie), wobei man allgemein für ein Netz aus $[-\infty, +\infty)$ definiert

   $$\limsup_{i\in I} x_i = \inf_{k\in I} \sup_{I\ni i\geq k} x_i \quad (\in [-\infty, +\infty])\,.$$

   Schließlich zeige man, dass es nicht abgeschlossene kompakte Teilmengen gibt, und dass alle kompakten Teilmengen nach oben beschränkt sind und ihr Supremum enthalten!

5. Sei M eine mit $\leq$ total geordnete Menge. Die Ordnungstopologie $\mathcal{T}_{ord}(M)$ auf M ist die von der Subbasis $\{(a, +\infty) : a \in M\} \cup \{(-\infty, a) : a \in M\}$ auf M erzeugte Topologie.

   Unter welcher Bedingung ist $\{(a, b) : a < b\}$ eine Basis von $\mathcal{T}_{ord}$?

   Zeigen Sie, dass die Topologie, welche von $\{(a, +\infty) : a \in M\} \cup \{(-\infty, a] : a \in M\}$ erzeugt wird feiner als $\mathcal{T}_{ord}$ ist!

6. Geben Sie eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ an, sodass $\mathcal{T}_{ord}(M) \neq \mathcal{T}_{ord}(\mathbb{R})|_M$.

7. Sei I eine gerichtete Menge und ∞ ein nicht in I enthaltenes Element. Man versehe I derart mit einer Topologie, sodass für jeden topologischen Raum X und jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ in X mit betrefflicher Menge I als Indexmenge und jedes $x \in X$ folgende beiden Aussagen äquivalent ist:

   $x_i \to x,\ i \in I.$

   $f : I \cup \{\infty\} \to X$ ist stetig, wobei $f(i) = x_i$ und $f(\infty) = x$.

8. Ein Filter $\mathcal{U}$ auf $M \times M$ für eine nichtleere Menge M heißt uniforme Struktur oder Uniformität auf M, falls

   ($U1$) Für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt $\Delta := \{(x, x) : x \in M\} \subseteq U$.

   ($U2$) Für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt $U^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in U\} \in \mathcal{U}$.

   ($U3$) Für alle $U \in \mathcal{U}$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}$, sodass $V \circ V := \{(x, z) : \exists y \in M, (x, y) \in V, (y, z) \in V\} \subseteq U$.

   Zeigen Sie: $\mathcal{U}$ hat eine Filterbasis bestehend aus symmetrischen Mengen ($U = U^{-1}$). Aus $V, W \in \mathcal{U}$ folgt $V \circ W \in \mathcal{U}$. $\mathcal{U}^n := \{V_1 \circ \cdots \circ V_n : V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{U}\}$ und auch $\hat{\mathcal{U}}^n := \{V \circ \cdots \circ V : V \in \mathcal{U}\}$ sind jeweils Filterbasen von $\mathcal{U}$.

9. Sei $\mathcal{U}$ eine Uniformität auf M. Für $x \in M$ sei

$$\mathcal{U}_x := \{U_x : U \in \mathcal{U}\}, \quad \text{wobei} \quad U_x := \{y \in M : (x, y) \in U\}.$$

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}_x$ für jedes $x \in M$ ein Filter ist, und dass es eine Topologie auf M gibt, sodass die $\mathcal{U}_x$ genau die Umgebungsfilter dieser Topologie sind.