Übungen zu Topologie WS13/14, 2. Übung

1. Sei $\mathcal{U}$ eine Uniformität auf M. Für $x \in M$ sei

   $$\mathcal{U}_x := \{U_x : U \in \mathcal{U}\}, \quad \text{wobei} \quad U_x := \{y \in M : (x, y) \in U\}.$$

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}_x$ für jedes $x \in M$ ein Filter ist, und dass es eine Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ auf M gibt, sodass die $\mathcal{U}_x$ genau die Umgebungsfilter dieser Topologie sind. Zeigen Sie auch, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   - $(M, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$ erfüllt $(T0)$
   - $(M, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$ erfüllt $(T1)$
   - $(M, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$ erfüllt $(T2)$
   - $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \Delta$.

2. Sei (M, d) ein pseudometrischer Raum. Definiere für $\epsilon > 0$ $U_\epsilon = \{(x, y) \in M \times M : d(x, y) < \epsilon\}$. Man zeige, dass der von der Filterbasis (?) $\{U_\epsilon : \epsilon > 0\}$ erzeugte Filter eine Uniformität $\mathcal{U}(d)$ auf M ist. Weiters zeige man, dass die von d erzeugte Topologie auf M mit der von $\mathcal{U}$ erzeugter Topologie übereinstimmt.

3. Sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe, dh. $(x, y) \mapsto x \cdot y$ (als Abbildung von $G \times G$ nach G) und $x \mapsto x^{-1}$ sind stetig. Ist $\mathfrak{U}(e)$ der Umgebungsfilter des neutralen Elementes, so zeige man, dass durch

   $$\mathcal{U}_r := \{U_r(W) : W \in \mathfrak{U}(e)\}, \; \mathcal{U}_l := \{U_l(W) : W \in \mathfrak{U}(e)\},$$

   $$\mathcal{U} := \{U_l(W) \cap U_r(W) : W \in \mathfrak{U}(e)\},$$

   drei Uniformitäten auf G definiert sind, wobei

   $$U_r(W) = \{(x, y) \in G \times G : xy^{-1} \in W\}, \; U_l(W) = \{(x, y) \in G \times G : x^{-1}y \in W\}.$$

   Zeigen Sie weiters, dass die von diesen Uniformitäten erzeugten Topologien mit $\mathcal{T}$ übereinstimmen.

   Hinweis: Links- und Rechtstranslationen sind Homöomorphismen.

4. Seien M, N nichtleere Mengen und $\mathcal{U}$ eine Uniformität auf M und $\mathcal{V}$ eine solche auf N. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt gleichmäßig stetig, falls der von $(f \times f)(\mathcal{U})$ erzeugte Filter auf $N \times N$ feiner als $\mathcal{V}$ ist.

   Zeigen Sie:

   (a) $f : M \to N$ ist genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn es für alle $V \in \mathcal{V}$ ein $U \in \mathcal{U}$ gibt sodass $(f \times f)(U) \subseteq V$.

   (b) Jede gleichmäßig stetige Abbildung ist stetig bzgl. der von der Uniformität erzeugten Topologie.

   (c) Die Hinereinanderausführung gleichmäßig stetiger Abbildung ist gleichmäßig stetig.

(d) Sollten die beteiligten Uniformitäten von (Pseudo)-Metriken erzeugt werden, so ist der Begriff 'gleichmäßig stetig' hier äquivalent zur bekannten Begriffbildung 'gleichmäßig stetig' zwischen (Pseudo)-metrischen Räumen.

5. Seien $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$ und $(X, \mathcal{T})$ topologische Räume. Man zeige, dass $(X, \mathcal{T})$ genau dann homöomorph zu einem $A \subseteq \prod_{i\in I} X_i$ (versehen mit der Spurtopologie der Produkttopologie) ist, wenn es eine Punkte trennende Familie $f_i : X \to X_i, i \in I$ von Funktionen auf X gibt, sodass $\mathcal{T}$ genau die initiale Topologie bezügliche dieser Funktionen ist.

   Zeigen Sie in dem Fall auch, dass sich die Axiome $(T0)$, $(T1)$, $(T2)$ von den $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$ auf $(X, \mathcal{T})$ vererbt.

   Schließlich sei $\mathcal{T}$ die initiale Topologie bezügliche dieser Funktionen f_i, wobei aber die f_i nicht Punkte trennend ist. Kann $(X, \mathcal{T})$ trotzdem $(T0)$, $(T1)$ oder $(T2)$ sein?

6. Zeigen Sie, dass $X/\approx$ versehen mit der Quotiententopologie total zusammenhangslos ist. Dabei ist $x \approx y \Leftrightarrow (\forall P \subseteq X,$ offen und abgeschlossen $, x \in P \Rightarrow y \in P)$.

7. Zeigen Sie, dass der Komponentenraum (dh. $X/\sim$) eines kompakten $T2$-Raumes X ein Null-dimensionaler, kompakter $T2$-Raum ist.

8. Sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe. Zeigen Sie, dass die e enthaltende Zusammenhangskomponente ein Normalteiler ist!

   Hinweis: Verwenden Sie die Stetigkeit von $(x, y) \mapsto x^{-1}y$ und die von $y \mapsto xyx^{-1}$!

9. Betrachte den reellen Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{N})$ aller reellen und quadratisch summierbaren Folgen. Dabei sei $X \subseteq \ell^2(\mathbb{N})$ die Menge aller Folgen mit rationalen Folgengliedern. Zeigen Sie, dass X versehen mit der Spurtopologie total zusammenhangslos, aber nicht Null-dimensional ist.

   Hinweis: Für total zusammenhangslos zeigen Sie, dass für zwei verschiedene Folgen $x, y \in X$ zwei in X offene, disjunke G_x, G_y existieren, sodass $x \in G_x, y \in G_y$ und $X = G_x \cup G_y$.

   Für den zweiten Teil konstruieren Sie für jede beschränkte und offene Nullumgebung $V \subseteq \ell^2(\mathbb{N})$ ein Element $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, das im Rand von V ist.