Übungen zu Topologie WS13/14, 3. Übung

1. Zeigen Sie, dass $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} a_k$ stetig und injektiv ist, wobei $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie versehen ist.

   Man zeige auch, dass $f(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}([0,1] \setminus U_n)$ übereinstimmt, wobei $U_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
   $$U_{n+1} = U_n \cup \bigcup_{j=1}^{\frac{3^n-1}{2}} (\frac{2j-1}{3^n}, \frac{2j}{3^n}).$$
   Somit ist $f(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ die Kantorsche Menge C und $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$ ist ein Homöomorphismus. Warum?

2. Sei $Y = \{0,1\}$ und $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$. Zeige, dass $(Y, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum ist. Weiters zeige man, dass ein beliebiger topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ genau dann das Axiom $(T0)$ erfüllt, wenn es zu $x \neq y$ auf X ein stetiges $f : X \to Y$ gibt, sodass $f(x) \neq f(y)$. Man zeige auch, dass $(X, \mathcal{T})$ genau dann das Axiom $(T0)$ erfüllt, wenn $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einer Teilmenge von Y^I ist, wobei I eine hinreichend große Indexmenge, Y^I mit der Produkttopologie versehen und betreffliche Teilmenge mit der Spurtopologie versehen ist.

3. Man betrachte $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Weiters sei zu $\epsilon > 0$ und $(x,y) \in X$
   $$U^\epsilon(x,y) := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y) - (a,b)\|_2 < \min(\epsilon, y)\},\ y > 0,$$
   $$U^\epsilon(x,0) := \{(x,0)\} \cup \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \|(a,b) - (x,\epsilon)\| < \epsilon\},\ y = 0.$$
   Sei $\mathcal{T}$ die eindeutige Topologie auf X, sodass $[\{U^\epsilon(x,y) : \epsilon > 0\}]$ die Umgebungsfilter bzgl. $\mathcal{T}$ sind.

   Zeigen Sie, dass $A := \mathbb{Q} \times \{0\}$ und $B := (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \{0\}$ zwei disjunkte, abgeschlossene aber nicht durch offene Mengen getrennte Mengen sind.

   Hinweis: Für nicht durch offene Mengen getrennt: Seien O_A und O_B offene Obermengen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n := \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : U^{\frac{1}{n}}(x,0) \subseteq O_B\}$. Dann gilt $\mathbb{Q} \cup \bigcup M_n = \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit dem Bairschen Satz, dass $\overline{M_n}$ für ein n nichtleeres Inneres hat ....

4. Man betrachte $X := \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : y \geq 0\}$. Weiters sei zu $\epsilon > 0$ und $(x,y) \in X$
   $$U_\epsilon^+(x,y) := \{(z,0) \in \mathbb{Q}^2 : |z - (x - \frac{y}{\sqrt{2}})| < \epsilon\},$$
   $$U_\epsilon^-(x,y) := \{(z,0) \in \mathbb{Q}^2 : |z - (x + \frac{y}{\sqrt{2}})| < \epsilon\},$$
   $$U_\epsilon(x,y) := \{(x,y)\} \cup U_\epsilon^+(x,y) \cup U_\epsilon^-(x,y).$$
   Man skizzieren $U_\epsilon(x,y)$. Man zeige, dass es auf X eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ gibt, sodass $\{U_\epsilon(x,y) : \epsilon > 0\}$ Filterbasen der Umgebungsfilter sind.

   Man zeige, dass $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff ist!

5. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel bestimme man den Abschluss von $U_\epsilon(x,y)$ für ein festes $(x,y) \in X$ und ein festes $\epsilon > 0$. Man zeige weiters, dass für $(x,y),(a,b) \in X$ und $\epsilon, \delta > 0$ immer $\overline{U_\epsilon(x,y)} \cap \overline{U_\delta(a,b)} \neq \emptyset$.

   Ist $(X,\mathcal{T})$ regulär? Schließlich leite man daraus her, dass jede stetige $\mathbb{R}$-wertige Funktion auf X konstant ist.

   Hinweis: Aus $f : X \to \mathbb{R}$ stetig mit $0, 1 \in f(X)$ folgt

$$f\left(\overline{f^{-1}(-\infty, \frac{1}{3})}\right) \cap f\left(\overline{f^{-1}(\frac{2}{3}, +\infty)}\right) = \emptyset.$$

   Warum ?

6. Seien $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$ und $(X,\mathcal{T})$ topologische Räume, wobei $\mathcal{T}$ die initiale Topologie bzgl. Abbildungen $f_i : X \to X_i, i \in I$ ist. Zeigen Sie, dass sich das $(T3)$ von den $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$ auf $(X,\mathcal{T})$ vererbt. Dasselbe zeige man für das $(T3\frac{1}{2})$

7. Für eine Indexmenge I seien M_i nichtleere Mengen und $\mathcal{U}_i$ jeweils Uniformitäten auf M_i. Weiters sei M eine nichtleere Menge und $f_i : M \to M_i$ seien Funktionen.

   Man zeige: Es gibt auf M eine eindeutige initiale unifomre Struktur bzgl. der Abbildungen f_i, dh. : Es gibt eine eindeutige gröbste unifomre Struktur $\mathcal{U}$ auf M, sodass alle f_i gleichmäßig stetig sind.

   Zeigen Sie weiters, dass die von $\mathcal{U}$ induzierte Topologie genau die initiale Topologie bzgl. aller f_i ist, wenn man die Mengen M_i mit der von $\mathcal{U}_i$ induzierten Topologie versieht.

8. Sei M eine nichtleere Menge versehen mit einer uniformen Struktur $\mathcal{U}$. Weiters sei $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ die von $\mathcal{U}$ induzierte Topologie.

   Man zeige: Der Abschluss einer Menge $A \subseteq M$ stimmt mit $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(A)$ überein, wobei $U(A) := \{y : \exists x \in A : (x,y) \in U\}$. Weiters zeige man, dass für $T \subseteq M \times M$ gilt $\overline{T} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \circ T \circ U$, wobei der Abschluss bzgl. $\mathcal{T}(\mathcal{U}) \times \mathcal{T}(\mathcal{U})$ ist und $\circ$ für das Realtionenprodukt steht.

   Schließlich zeige man, dass das $(T3)$ für $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ erfüllt ist, und dass $\{\overline{U} : U \in \mathcal{U}\}$ und $\{U^\circ : U \in \mathcal{U}\}$ eine Filterbasis von $\mathcal{U}$ abgeben.