Übungen zu Topologie WS13/14, 4. Übung

1. Sei $X = \mathbb{N}$ und sei $\mathcal{T}$ die Menge aller Komplemente endlicher Teilmengen von X angereichert um die leere Menge (Kofinite Topologie).

   Sei $A = \{1, 2\}$ und $f : A \to [-1, 1]$ mit $f(1) = -1,\ f(2) = 1$. Man zeige, dass A abgeschlossen, f darauf stetig und derart ist, dass es keine stetige Fortsetzung von f zu einer Funktion auf X nach $[-1, 1]$ gibt.

   Hinweis: Gäbe es eine Fortsetzung, so schreibe man $[-1, 1]$ geeignet als Vereinigung dreier unterschiedlicher Mengen und betrachte deren Urbilder! Können alle 3 dieser Urbilder abgeschlossen sein?

2. Sei R ein kommutativer Ring und bezeichne $S := \mathrm{Spec}(R)$ die Menge aller echten Primideale. (Ideal I von R heißt prim, wenn aus $xy \in I$ immer $x \in I$ oder $y \in I$ folgt.) Sei $h : \mathfrak{P}(S) \to \mathfrak{P}(S)$ die Abbildung

   $$h(B) := \{P \in S : P \supseteq \bigcap_{I \in B} I\}.$$

   Zeigen Sie, dass h eine Kuratowskische Mengenfunktion gemäß Beispiel 3, erste Übung, ist. Die erzeugte Topologie $\mathcal{Z}$ heißt Zariski-Topologie.

   Hinweis: Die Tatsache, dass die P's Primideale sind, braucht man für die Eigenschaft $h(A \cup B) \subseteq h(A) \cup h(B)$ oder äquivalent für $P \notin h(A) \cup h(B) \Rightarrow P \notin h(A \cup B)$.

3. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel sei $M \subseteq \mathrm{Spec}(R)$. Zeigen Sie, dass für $A \subseteq M$ der Abschluss von A bzgl. $\mathcal{Z}|_M$ durch

   $$\{P \in M : P \supseteq \bigcap_{I \in A} I\}$$

   gegeben ist.

   Sei nun R ein Unterring von dem Ring $C(X, \mathbb{R})$ aller reellwertigen Funktion auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi : (X, \mathcal{T}) \to (\mathrm{Spec}(R), \mathcal{Z}),\ x \mapsto \ker m_x$, wobei $m_x(f) = f(x)$, tatsächlich nach $\mathrm{Spec}(R)$ hinein abbildet und stetig ist.

   Hinweis: Stetigkeit bedeutet auch $\phi(\overline{C}) \subseteq \overline{\phi(C)}$.

4. Ein uniformer Raum $(M, \mathcal{U})$ heißt vollständig, wenn jedes Cauchy-Netz konvergiert. $(x_i)_{i \in I}$ heißt Cauchy-Netz, wenn es für alle $U \in \mathcal{U}$ ein $i(U) \in I$ gibt, sodass $(x_i, x_j) \in U$, wenn $i, j \geq i(U)$.

   Zeigen Sie, dass $(x_i)_{i \in I}$ genau dann ein Cauchy-Netz ist, wenn der davon erzeugte Filter ein Cauchy-Filter ist. Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt dabei Cauchy-Filter, falls es für alle $U \in \mathcal{U}$ ein $F \in \mathcal{F}$ gibt, sodass $F \times F \subseteq U$.

   Zeigen Sie weiters, dass gleichmäßig stetige Abbildungen Cauchy-Netze bzw. Cauchy-Filter auf Cauchy-Netze bzw. Cauchy-Filter abbilden.

   Zeigen Sie schließlich, dass konvergente Netze bzw. Filter auch Cauchy- sind und dass für einen vollständigen uniformen Raum $(M, \mathcal{U})$ (jedes Cauchy-Netz ist konvergent) eine Teilmenge $T \subseteq M$ genau dann abgeschlossen (bzgl. $\mathcal{T}(U)$) ist, wenn $(T, \mathcal{U}|_T)$ vollständig ist. Hier ist $\mathcal{U}|_T$ die initiale Uniformität auf T bzgl. der Einbettung.

5. Zeigen Sie, dass vollständig metrische Räume auch vollständig uniforme Räume sind!

6. Seien M, N nichtleere Mengen und $\mathcal{U}$ eine Uniformität auf M und $\mathcal{V}$ eine solche auf N. Weiters sei T eine bzgl. $\mathcal{T}(U)$ dichte Teilmenge von M, und sei $(N, \mathcal{V})$ als vollständig und Hausdorff vorausgesetzt.

   Zeigen Sie, dass man jede gleichmäßig stetige Abbildung $f : T \to N$ zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $\hat{f} : M \to N$ fortsetzen kann.

   Hinweis: Für die gleichmäßige Stetigkeit von $\hat{f}$ könnte das letzte Beispiel der dritten Übung hilfreich sein.

7. Man konstruiere eine surjektive, stetige Abbildung von der kantorschen Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ auf das Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

   Hinweis: Die Abbildung ist ähnlich aufgebaut wie die im ersten Beispiel der dritten Übung.

8. Sei $A \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}} =: X$ abgeschlossen ($\{0, 1\}$ versehen mit der diskreten Topologie). Zeigen Sie, dass es ein stetiges $f : X \to A$ mit $f|_A = \mathrm{id}_A$ gibt. Das heißt, dass jede abgeschlossene Teilmenge von X ein Retrakt ist.

   Hinweis: Versehen sie X mit einer Metrik d, welche mit der Produkttopologie verträglich ist und welche die Eigenschaft

   $$d(x, y) = d(x, z) \Rightarrow y = z$$

   hat. Zu $x \in X$ betrachte man dann das stetige $x \mapsto d(x, A)$ und suche $y \in A$ mit $d(x, A) = d(x, y)$.....