Übungen zu Topologie WS13/14, 5. Übung

1. Mit der Notation aus dem Beispiel 3 der vierten Übung sei $(X, \mathcal{T})$ kompakt und $(T2)$, und sei $R = C(X, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass dann das Bild von ϕ genau die Menge aller maximalen Ideal von R ist, und dass $\phi : X \to \phi(X)$ ein Homöomorphismus ist.

   Hinweis: Für $f_1, \dots, f_n \in I$ (I maximales Ideal) zeige man, dass $\bigcap_{j=1,\dots,n} \ker f_j$ nicht leer ist, indem man aus dem Gegenteil die Existenz einer Nullstellenfreien Funktion aus I herleitet. Nun verwende die Kompaktheit, um auf $I \in \phi(X)$ schließen zu können. Für den 2ten Teil zeige $\overline{\phi(A)} \subseteq \phi(\overline{A})$.

2. Zeigen Sie, dass eine topologische Gruppe $(G, \mathcal{T})$ genau dann metrisierbar ist, wenn der Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(e)$ des neutralen Elements eine abzählbare Basis hat und $\bigcap_{V \in \mathfrak{U}(e)} V = \{e\}$ erfüllt.

   Zeigen Sie weiters, dass es in dem Fall eine mit $\mathcal{T}$ verträgliche Metrik gibt, die links invariant ist, dh. $d(gx, gy) = d(x, y)$ für alle $x, y, g \in G$ erfüllt.

3. Zeigen Sie, dass jede topologische abelsche Gruppe $(G, \mathcal{T})$ mit $(T2)$ eine Vervollständigung hat, es also eine vollständige topologische abelsche Gruppe $(\hat{G}, \hat{\mathcal{T}})$ mit $(T2)$ gibt, die $(G, \mathcal{T})$ als dichten Teilraum enthält.

   Vollständigkeit bezieht sich auf die von $\mathcal{T}$ eindeutig induzierte Uniformität.

   Zeigen Sie weiters, dass jeder topologische Vektorraum eine Vervollständigung hat!

4. Erfülle $(X, \mathcal{T})$ das $(T3, 5)$. Zeigen Sie, dass für jede Menge $\mathfrak{U}$ von Uniformitäten $\mathcal{U}$ auf X, die alle $\mathcal{T}$ induziert, der Supremumsfilter $\bigvee_{\mathcal{U} \in \mathfrak{U}} \mathcal{U}$ auf $X \times X$ eine Uniformität abgibt, die auch $\mathcal{T}$ induziert. Zeigen Sie damit, dass es eine feinste Uniformität auf X gibt, die $\mathcal{T}$ induziert.

5. Sei $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär. Sei

   $$\mathfrak{U} := \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ Uniformität auf } X, \mathcal{T}(U) = \mathcal{T}, X \text{ bzgl. } \mathcal{U} \text{ vollständig beschränkt}\}$$

   Zeigen Sie, dass $\mathfrak{U}$ nicht leer ist, und dass $\mathfrak{U}$ bijectiv allen $(T2)$-Kompaktifizierungen von $(X, \mathcal{T})$ (modulo Isomorphie) entspricht. Welche Rolle spielt dabei die Stone-Czech Kompaktifizierung?

6. Man gebe einen Homöomorphismus an, der die kantorschen Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ auf $K \times K$ abbildet, wobei die rechte Seite mit der Produkttopologie versehen ist.

   Mit Hilfe dieses Homöomorphismuses und der Abbildung aus dem vorletzten Beispiel der vierten Übung baue man eine surjektive und stetige Abbildung von $[0, 1] \times [0, 1]$ (versehen mit der Produkttopologie) auf $[0, 1]$. Kann eine derartige Abbildung injektiv sein?

7. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Hausdorffraum mit einer Basis $\mathcal{B}$ der Topologie. Zeigen Sie, dass X dann stetiges Bild einer abgeschlossenen Teilmenge A von $\{0, 1\}^{\mathcal{B}}$ ist.

   Hinweis: Setze $C(0, B) = \overline{B}$ und $C(0, B) = X \setminus B = B^c$ für $B \in \mathbb{C}$. Für $(\xi_B)_{B \in \mathcal{B}} \in \{0, 1\}^{\mathcal{B}}$ definiere $\phi((\xi_B)_{B \in \mathcal{B}}) := \bigcap_{B \in \mathcal{B}} C(\xi_B, B)$. Zeigen Sie mit Hilfe der kompaktheit von X, dass $A := \{(\xi_B)_{B\in\mathcal{B}} \in \{0,1\}^{\mathcal{B}} : \phi((\xi_B)_{B\in\mathcal{B}}) \neq \emptyset\}$ abgeschlossen in $\{0,1\}^{\mathcal{B}}$ ist. Zeigen Sie auch, dass $\phi((\xi_B)_{B\in\mathcal{B}})$ höchstens einpunktig ist, indem Sie $x \neq y$ aus dieser Menge auf einen Widerspruch führen. Nun definiere man $f : A \to X$ geeignet, sodass f stetig wird.

8. Zeigen Sie, dass jeder kompakte metrische Raum stetiges Bild der Kantorschen Menge K ist.

   Anmerkung: Daraus und aus der Funktionalanalysis leitet man unschwer her, dass jeder separable Banachraum Y isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von $C(K)$ ist. In der Tat ist die abgeschlossene Einheitskugel $K_1^{Y'}(0)$ des Dualraumes von Y bzgl. der schwach* Topologie kompakt und metrisierbar, also das stetige Bild $f(K)$ der Kantorschen Menge. Zudem ist gemäß Hahn-Banach $y \mapsto (y' \mapsto y'(y))$ eine lineare Isometrie von Y nach $C(K_1^{Y'}(0))$. Schließlich ist dann $y \mapsto (t \mapsto f(t)(y))$ eine lineare Isometrie von Y nach $C(K)$.